

**LAPORAN PENELITIAN FUNDAMENTAL  
TAHUN ANGGARAN 2011**



**ANALISIS KESTABILAN MODEL EPIDEMIK HIV/AIDS  
DENGAN PENGARUH KELOMPOK UMUR DAN  
KEPADATAN PENDUDUK**

**Drs. Marsudi, MS.  
Kwardiniya A., SSi., MSi.**

Dibiayai oleh Direktorat Jenderal Pendidikan Tinggi, Kementerian Pendidikan Nasional  
melalui DIPA Universitas Brawijaya REV.1 Nomor: 0636/023-04.2.16/15/2011 R,  
tanggal 30 Maret 2011 dan berdasarkan Surat dari DP2M Dikti Nomor : 121/D3/PL/2011  
tanggal 7 Februari 2011

**FAKULTAS MIPA/MATEMATIKA  
UNIVERSITAS BRAWIJAYA  
NOPEMBER 2011**

## HALAMAN PENGESAHAN LAPORAN HASIL PENELITIAN FUNDAMENTAL

1. Judul Penelitian : Analisis Kestabilan Model Epidemik HIV/AIDS dengan Pengaruh Kelompok Umur dan Kepadatan Penduduk
2. Ketua Peneliti
  - a. Nama Lengkap dan Gelar : Drs. Marsudi, MS.
  - b. Jenis Kalamín : L
  - c. NIP : 19610117 1988021002
  - d. Jabatan Fungsional : Lektor Kepala
  - e. Jabatan Struktural : -
  - f. Bidang Keahlian : Matematika Terapan
  - g. Fakultas/Jurusan : MIPA/Matematika
  - h. Perguruan Tinggi : Universitas Brawijaya
  - i. Tina Peneliti

NAMA	BIDANG KEAHLIAN	FAKULTAS/JURUSAN	PERGURUAN TINGGI
1. Drs. Marsudi, MS.	Matematika Terapan	MIPA/ MatematikaM	Universitas Brawijaya
2. Kwardiniya A,SSi,MSi	Matematika Terapan	IPA/ Matematika	Universitas Brawijaya

3. Pendanaan dan jangka waktu penelitian
  - a. Jangka Waktu penelitian yang diusulkan : 1 tahun
  - b. Biaya total yang diusulkan : Rp. 37.000.000,-
  - c. Biaya yang disetujui tahun IV 11 : Rp. 34.000.000,-

Malang, 30 Nopember 20011  
Ketua Peneliti,

Mengetahui,  
Pembantu Dekan I  
Fakultas MIPA



Dr. Ing. Setyawan P. Sakti, M. Eng  
NIP. 196508251990021001

Drs. Marsudi, MS.  
NIP. 196101171988021002

Menyetujui,  
Ketua LPPM Universitas Brawijaya



Prof. Dr. H. Siti Chuzaimi, MS.  
NIP. 19530514 198002 2 001

## SISTEMATIKA LAPORAN PENELITIAN FUNDAMENTAL

HALAMAN PENGESAHAN .....	i
<b>A. LAPORAN HASIL PENELITIAN</b>	
RINGKASAN DAN SUMMARY .....	ii
PRAKATA .....	vi
DAFTAR ISI .....	vii
DAFTAR TABEL .....	ix
DAFTAR GAMBAR .....	x
DAFTAR LAMPIRAN .....	xi
BAB I. PENDAHULUAN .....	1
BAB II. TINJAUAN PUSTAKA .....	3
BAB III. TUJUAN DAN MANFAAT PENELITIAN .....	10
BAB IV. METODE PENELITIAN .....	11
BAB V. HASIL DAN PEMBAHASAN .....	14
BAB VI. KESIMPULAN DAN SARAN .....	34
DAFTAR PUSTAKA .....	36
LAMPIRAN .....	38
<b>B. DRAF ARTIKEL ILMIAH</b>	

## A. LAPORAN HASIL PENELITIAN





## RINGKASAN

## ANALISIS KESTABILAN MODEL EPIDEMIK HIV/AIDS DENGAN PENGARUH KELOMPOK UMUR DAN KEPADATAN PENDUDUK

Sampai saat ini, masalah HIV/AIDS adalah masalah kesehatan masyarakat yang serius. Penderita AIDS umumnya didominasi oleh kelompok usia remaja dan usia produktif. Pola penyebaran infeksi yang umum terjadi melalui hubungan seksual (*sexually transmitted diseases* = STD). Ancaman epidemik telah terlihat melalui data kasus HIV/AIDS yang terus meningkat.

Penelitian ini bertujuan untuk menganalisis kestabilan epidemik HIV/AIDS dengan pengaruh kelompok umur dan kepadatan penduduk melalui model matematika sederhana (model SI). Populasi dibagi menjadi kelompok anak-anak dan dewasa. Kelompok dewasa diasumsikan aktif seksual dan secara implisit diasumsikan rasionya konstan. Di samping itu, juga *infected* dewasa melahirkan bayi *susceptible* dan bayi *infected*. Model kompartemen SI diperoleh dengan menerjemahkan mekanisme penyebaran penyakit yang disajikan dalam bentuk sistem persamaan diferensial non linear. Parameter-parameter model diperoleh dengan cara estimasi menggunakan data HIV/AIDS di Indonesia dan dari literatur-literatur yang relevan. Kestabilan lokal dan global dari titik kesetimbangan model dianalisis menggunakan konsep nilai eigen matriks Jacobi dan prinsip invariansi Lyapunov atau menggunakan nilai-nilai ambang yang bermakna, yaitu rasio reproduksi *susceptible* ( $R_1$ ), rasio reproduksi *infected* ( $R_1$ ) dan laju kontak *infectious* ( $R_2$ ).

Dalam penyakit tanpa *recovery* dengan besar populasi sebarang, model epidemik HIV/AIDS dengan kelompok umur dan kepadatan penduduk terdapat titik kesetimbangan bebas penyakit ( $R_1 > 1$ ) dan titik kepunahan *susceptible* ( $R_0 > 1$  dan  $\xi = 1$ ). Titik kesetimbangan bebas penyakit akan stabil asimtotik lokal jika  $R_0 < 1$  dan  $R_0 + R_2 \leq 1$  dan stabil asimtotik global jika dipenuhi juga

$R_1 > \frac{(\eta_1 + \mu)(\nu + \alpha)}{\eta_1 \alpha}$ . Titik kesetimbangan kepunahan *susceptible* akan stabil asimtotik

lokal jika  $R_1 \leq 1$  dan stabil asimtotik global jika dipenuhi juga  $\bar{R}_0 > \frac{\mu + \eta_2 + \gamma}{\eta_2}$

Untuk kasus data HIV/AIDS di Indonesia dengan populasi awal tahun 2009, nilai-nilai ambang rasio reproduksi *susceptible*  $R_1 = 99.2236 >$ , rasio reproduksi *infected*  $R_0 = 0.0001169$  dan laju kontak infeksi  $R_2 = 0.9878$ . Selanjutnya, karena

$R_2 + R_0 = 0,9879 < 1$  dan  $R_1 = 99,2236 > 2,4931 = \frac{\mu + \eta_2 + \gamma}{\eta_2}$ , model epidemik HIV/

AIDS dengan dua kelompok umur dan kepadatan penduduk mempunyai satu titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_1^* = (55.029.000, 10.450.000, 0, 0)$  yang stabil asimtotik global setelah kira-kira 18 tahun.



## SUMMARY

# STABILITY ANALYSIS FOR THE HIV/AIDS EPIDEMIC MODEL WITH INFLUENCE OF THE AGE GROUP AND POPULATION DENSITY

Recently, the transmission of HIV/AIDS is a serious problem to the human health. The sufferer the AIDS is generally dominated by the age group of the adolescent and the productive age. The pattern of the spreading of the general infection happened through sexual relations (STD). The threat epidemic was seen through the case data of the HIV/AIDS that continued to increase.

The objective of this research is to analyze of stability of the HIV/AIDS epidemics model with the influence of the age group and population density through the simple mathematical model (the SI model). The population was divided into juvenile and adult groups. Only adult are assumed to be sexually active and we implicitly assume that the ratio is constant. We also assume that infected adults may produce both and infected newborns. The SI compartment model is obtained by translating mechanism spreading of disease to be presented in the form of system of nonlinear differential equations. The model parameters obtained by estimation used the data of HIV/AIDS in Indonesia and from relevant literatures. The local and global stability for the equilibrium point of the model is described use analysis of eigenvalues of Jacobian matrix and the Lyapunov-LaSalle's invariant principle or used threshold values of the susceptible reproduced ratio ( $R_1$ ), the infected reproduced ratio ( $R_0$ ), and the infection contact rate ( $R_2$ ).

In a disease without recovery with any initial population size, the HIV/AIDS epidemics model with influence of the age group and population density has the disease-free equilibrium if  $R_1 > 1$  and the susceptible extinction equilibrium if  $R_0 > 1$  dan  $\xi = 1$ . The disease-free equilibrium is locally asymptotically stable if  $R_0 < 1$  dan  $R_0 + R_2 \leq 1$  and global asymptotically stable if  $R_1 > \frac{(\eta_1 + \mu)(\nu + \alpha)}{\eta_1 \alpha}$ . The



susceptible extinction equilibrium is locally asymptotically stable if  $R_1 \leq 1$  and global asymptotically stable if  $R_0 > \frac{\mu + \eta_2 + \gamma}{\eta_2}$

For the case of the HIV/AIDS data in Indonesia with initial population of 2009, the threshold values of the susceptible reproduced ratio,  $R_1 = 99.2236$ , the infected reproduced ratio,  $R_0 = 0.0001169$  and the infection contact rate,  $R_2 = 0.9878$ . if

$R_2 + R_0 = 0.9879 < 1$  and  $R_1 = 99.2236 > 2.4931 = \frac{\mu + \eta_2 + \gamma}{\eta_2}$ , the HIV/AIDS dynamics

model with two age groups and population density has a unique disease-free equilibrium point. The disease-free equilibrium point  $E_1^* = (55.029.000, 10.450.000, 0, 0)$  is global asymptotically stable after approximately 18 years.



For the case of data of HIV/AIDS in Indonesia with initial population of 2009, threshold values of the susceptible reproduced ratio,  $R_1 = 99.2236$ , the infected reproduced ratio,  $R_0 = 0.0001169$  and the infection contact rate,  $R_2 = 0.9878$ . if  $R_2 + R_0 = 0.9879 < 1$  and  $R_1 = 99.2236 > 2,4931 = \frac{\mu + \eta_2 + \gamma}{\eta_2}$ , the HIV/AIDS dynamics model with two age groups and internal competition has a unique disease-free equilibrium point. The disease-free equilibrium point  $E_1^* = (55.029.000, 10.450.000, 0, 0)$  is global asymptotically stable after 20 years.





## PRAKATA

Puji syukur kami panjatkan kehadiran Allah SWT, karena atas rahmat dan karuniaNya sehingga kegiatan Penelitian Fundamental Tahun 2011 dengan judul “Analisis Kestabilan Model dengan Pengaruh Kelompok Umur dan Kepadatan Penduduk” dapat diselesaikan dengan baik.

Pada kesempatan ini kami Tim Pelaksana Penelitian Fundamental menyampaikan terima kasih kepada :

1. Dirjen Pendidikan Tinggi Kementerian Pendidikan Nasional, khususnya Ketua Program Desentralisasi Dikti Tahun Anggaran 2011 (Hibah Pe<sup>----</sup> Fundamental) atas biaya penelitian yang diberikan.
2. Rektor Universitas Brawijaya Malang, khususnya Lembaga Pe<sup>----</sup> dan Pengabdian Kepada Masyarakat Universitas Brawijaya atas bantuan dan dukungan moral sehingga pelaksanaan kegiatan penelitian dapat lancar.
3. Dekan Fakultas MIPA Universitas Brawijaya dan Ketua Jurusan Matematika atas dukungan teknis operasional sehingga dapat memperlancar pelaksanaan kegiatan penelitian.
4. Semua pihak yang secara langsung maupun tidak langsung telah mendukung kelancaran kegiatan penelitian.

Akhirnya, kami berharap semoga hasil penelitian ini akan banyak manfaatnya terutama bagi pengembangan ilmu pengetahuan.

Malang, 30 Oktober 2011

Ketua Pelaksana,

Drs. Marsudi, MS.

## DAFTAR ISI

	Halaman
HALAMAN PENGESAHAN .....	i
RINGKASAN DAN SUMMARY .....	ii
PRAKATA .....	vi
DAFTAR ISI .....	vii
DAFTAR TABEL.....	ix
DAFTAR GAMBAR.....	x
DAFTAR LAMPIRAN.....	xi
<b>BAB I. PENDAHULUAN</b> .....	<b>1</b>
1.1 Latar Belakang .....	1
1.2 Perumusan Permasalahan .....	2
<b>BAB II. TINJAUAN PUSTAKA</b> .....	<b>3</b>
2.1 Dinamika Epidemik HIV/AIDS .....	3
2.2 Konsep Kestabilan .....	4
<b>BAB III. TUJUAN DAN MANFAAT PENELITIAN</b> .....	<b>10</b>
3.1 Tujuan Penelitian .....	10
3.2 Manfaat Penelitian .....	10
<b>BAB IV. METODE PENELITIAN</b> .....	<b>11</b>
4.1 Waktu, Tempat dan Data Penelitian .....	11
4.2 Rancangan Model .....	11
4.3 Metode Analisis .....	12
<b>BAB V. HASIL DAN PEMBAHASAN</b> .....	<b>14</b>
5.1 Model epidemik HIV/AIDS dengan Kelompok Umur dan Kepadatan Penduduk .....	14
5.2 Eksistensi, Ketunggalan dan Keterbatasan Solusi .....	14
5.3 Analisis Kestabilan Model .....	16
5.3.1 Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan Trivial.....	16
5.3.2 Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan Bebas Penyakit....	16

5.3.2.1 Kestabilan Lokal titik Keseimbangan Bebas Penyakit .....	17
5.3.2.2 Kestabilan Global titik Keseimbangan Bebas Penyakit .....	19
5.3.3 Analisis Kestabilan Titik Keseimbangan Kepunahan <i>Susceptible</i> .....	20
5.3.3.1 Kestabilan Lokal titik Keseimbangan Kepunahan <i>Susceptible</i> .....	21
5.3.3.2 Kestabilan Global titik Keseimbangan Kepunahan <i>Susceptible</i> .....	22
5.4 Implementasi Model Epidemik HIV/AIDS di Indonesia .....	23
4.4.1 Estimasi Nilai Parameter Model .....	25
4.4.2 Analisis Nilai Ambang Rasio Reproduksi .....	28
4.4.3 Analisis Kestabilan Model .....	30
<b>BAB VI. KESIMPULAN DAN SARAN</b> .....	34
6.1 Kesimpulan .....	34
6.2 Saran .....	35
<b>DAFTAR PUSTAKA</b> .....	36
<b>LAMPIRAN</b> .....	38

**DAFTAR TABEL**

	Halaman
Tabel 5.1 Estimasi Jumlah Penduduk Indonesia (dalam ribuan) .....	24
Tabel 5.2 Estimasi $y(A_{maks})$ .....	27
Tabel 5.3 Estimasi Nilai Parameter Model .....	28



## DAFTAR GAMBAR

Halaman

Gambar 3.1 Diagram kompartemen <i>SI</i> dengan dua kelompok umur .....	11
Gambar 5.1 Data Penduduk Indonesia selama 8 tahun .....	24
Gambar 5.2 Plot dari $\beta_1$ terhadap $R_1$ .....	29
Gambar 5.3 Plot dari $\beta_2$ terhadap $R_0$ .....	29
Gambar 5.4 Plot dari $\nu$ terhadap $R_2$ .....	30
Gambar 5.5 Kestabilan global titik kesetimbangan bebas penyakit dari model epidemik HIV-AIDS dengan pengaruh kelompok umur dan kepadatan penduduk (Sistem 5.1) untuk kasus HIV/AIDS di Indonesia: $S_a(0) = 62.376.714$ , $S_d(0) = 168.972.405$ , $I_a(0) = 528$ , dan $I_d(0) = 19.445$ .....	32





## DAFTAR LAMPIRAN

	Halaman
Lampiran 1. Personalia Tenaga Peneliti beserta kualifikasinya .....	39
Lampiran 2. Makalah Seminar Nasional Matematika 2011 di UNPAR .....	40



## BAB I

### PENDAHULUAN

#### 1.1 Latar Belakang

Beberapa tahun terakhir, penularan epidemik HIV/AIDS di Indonesia berkembang pesat. Program pengendalian epidemik HIV/AIDS saat ini terdiri atas upaya pencegahan, pengobatan, dukungan dan perawatan bagi orang yang hidup dengan HIV/AIDS dan pengawasan. Pemerintah RI, UNDP dan para mitra lainnya bekerja sama menyusun rencana nasional yang akan membawa hasil yang nyata dan berkelanjutan dalam memerangi HIV/AIDS.

Di awal abad 20, model matematika diperkenalkan ke dalam epidemiologi oleh Kermack dan McKendrick (1927). Model matematika telah banyak terbukti dalam membantu pemahaman fenomena penyebaran penyakit infeksius. Misalnya, Murray (1993) menggunakan model SIR untuk model epidemik penyakit infeksius. Model yang digunakan dalam makalah ini merujuk pada model yang diperkenalkan oleh Lopez *et al.* (2007). Model epidemik HIV/AIDS dideskripsikan menggunakan model kompartemen, di mana secara demografi populasi dibagi menjadi dua subpopulasi, yaitu kelompok anak-anak berusia 0-14 tahun dan kelompok dewasa berusia 15 tahun ke atas.

Jika jumlah populasi terus meningkat dan sementara keadaan demografi atau lingkungannya mempunyai jumlah sumber yang terbatas, maka akan terjadi kepadatan penduduk karena kompetisi internal dan mempengaruhi keberlangsungan hidup bahkan dapat menyebabkan kematian individu dalam populasi tersebut. Kompetisi internal terjadi jika individu dari populasi yang sama berpengaruh negatif terhadap kebugaran individu yang lain karena mereduksi ketersediaan sumber yang terbatas. Pada tingkat individu, kompetisi terhadap sumber dapat mempengaruhi perkembangan, kelahiran, dan kelangsungan hidup. Pada tingkat populasi, kompetisi internal terhadap sumber dapat menimbulkan pertumbuhan populasi logistik.

Dalam penelitian ini akan dianalisis dan disimulasikan model dinamika epidemik HIV/AIDS di Indonesia dengan pengaruh kelompok umur dan kepadatan penduduk. Penelitian ini termasuk dalam *road map* Program Studi Matematika FMIPA Universitas Brawijaya, khususnya *domain Biomath* dalam bidang sains.

## 1.2 Perumusan Permasalahan

Masalah yang akan dikaji dalam penelitian ini adalah :

- a. Bagaimana mendapatkan modal dinamika epidemik HIV/AIDS dengan pengaruh kelompok umur (anak-anak dan dewasa) dan kepadatan penduduk (karena kompetisi internal)?
- b. Bagaimana analisis dinamik (secara analitik) dari model yang telah diperoleh dan bagaimana simulasi numeriknya untuk data di Indonesia?





## BAB II

### TINJAUAN PUSTAKA

#### 2.1 Dinamika Epidemik HIV/AIDS

Di awal abad 20, model matematika diperkenalkan ke dalam epidemiologi oleh Kermack dan McKendrick (1927). Model matematika telah banyak terbukti dalam membantu pemahaman fenomena penyebaran penyakit infeksius. Misalnya, Murray (1993) menggunakan model SIR untuk model epidemik dan dinamika penyakit infeksius. Marsudi dan Trisilowati (2004) dan Soewono *dkk.* (2007) menggunakan model SIR untuk mengkaji model penyebaran epidemik demam berdarah. Marsudi dan Handamari (2006) mengkaji model epidemik SEIR untuk campak.

Pada awalnya, model matematika untuk epidemik HIV hanya bersifat spekulatif dengan memasukkan aspek-aspek biologi dan perilaku dalam model. Misalnya, Brauer dan Castillo-Chavez (2001). Saat ini banyak penelitian tentang analisis matematika dari model dinamika yang disebarkan melalui kontak seksual dan dikombinasikan dengan data sehingga menjadi populer. Anderson dan May (1991) menyajikan beberapa model infeksi termasuk HIV. Model matematika telah dikembangkan dan digunakan untuk penyakit yang ditularkan melalui hubungan seksual oleh Garnett (dalam Rao, 2003). Penyakit yang disebarkan melalui kontak seksual (*sexually transmitted diseases* = STD) adalah penularan yang ditransfer dari satu orang ke satu orang lain melalui kontak seksual di dalam populasi. Lopez *et. al.* (2007) menggunakan model matematika untuk STD yang berkaitan dengan dinamika HIV dengan struktur usia yang diterapkan di Amerika Serikat. Dalam hal ini subpopulasi dimodelkan melalui proses epidemik *SI* yang sesuai untuk STD tanpa *recovery*.

Sebagian besar dari kajian para peneliti di atas menganalisis dinamika epidemik model, khususnya menentukan titik-titik kesetimbangan dan menganalisis kestabilannya. Titik kesetimbangan trivial (bebas penyakit) diperoleh jika dalam populasi tidak ada yang terinfeksi. Sebaliknya, titik kesetimbangan nontrivial (endemik) diperoleh jika dalam populasi terdapat individu yang terinfeksi. Kemudian masing-masing titik kesetimbangan dianalisis kestabilannya. Dalam teori epidemik klasik, biasanya ditemukan angka reproduksi  $R_0$ , yaitu nilai harapan dari infeksi kedua yang dihasilkan oleh individu terinfeksi pertama. Jika  $R_0 \geq 1$ , diperkirakan terjadi epidemik dan jika  $R_0 < 1$ , penyakit akan hilang dari populasi.

Model yang digunakan dalam penelitian ini merujuk pada model yang diperkenalkan oleh Lopez *et. al.* (2007), tetapi disesuaikan dengan data HIV/AIDS di Indonesia. Penelitian ini diharapkan dapat menghasilkan nilai-nilai ambang yang bermakna sehingga dapat menerangkan jenis kestabilan dari titik kesetimbangan model. Dari nilai-nilai ambang ini, parameter-parameter (epidemiologi atau demografi) mana yang dapat dikontrol untuk bahan pertimbangan dalam pencegahan HIV/AIDS.

## 2.2 Konsep Kestabilan

### (1) Titik Kesetimbangan

Suatu kesetimbangan (atau titik kesetimbangan) dari sebuah sistem dinamik dibangun oleh sebuah sistem otonomus dari persamaan diferensial adalah suatu solusi yang tidak berubah terhadap waktu.

#### Definisi 2.1

Misalkan diberikan suatu sistem otonomus dari persamaan diferensial yang ditulis dalam bentuk vektor

$$\frac{dx}{dt} = f(x) \quad (2.1)$$

di mana  $x = x(t) \in \mathbb{R}^n$  fungsi bernilai vektor dari  $t$  dan  $f: X \rightarrow \mathbb{R}^n$  adalah fungsi yang didefinisikan pada  $X \subseteq \mathbb{R}^n$  yang bergantung pada  $t$ .

Kesetimbangan kadang-kadang disebut titik tetap atau keadaan mantab. Banyak matematikawan merujuk ke kesetimbangan sebagai solusi persamaan diferensial yang bebas dari waktu dan merujuk ke titik tetap sebagai solusi persamaan diferensial yang bergantung pada waktu.

#### Definisi 2.2

Titik  $x^*$  disebut titik kesetimbangan dari sistem  $\frac{dx}{dt} = f(x)$  jika  $f(x^*) = 0$ .

Titik kesetimbangan  $x^*$  disebut titik kesetimbangan hiperbolik dari sistem (2.1) jika tidak ada nilai eigen dari matriks  $Df(x^*)$  dengan bagian real nol.

Perhatikan sistem linear

$$\frac{dx}{dt} = Ax \quad (2.2)$$



dengan matriks  $A = Df(\mathbf{x}^*)$ . Fungsi linear  $A\mathbf{x} = Df(\mathbf{x}^*)\mathbf{x}^*$  adalah bagian real dari  $f$  pada  $\mathbf{x}^*$ .

### Definisi 2.3

Sistem linear (2.2) dengan matriks  $A\mathbf{x} = Df(\mathbf{x}^*)\mathbf{x}^*$  disebut **linearisasi** dari sistem (2.1) pada  $\mathbf{x}^*$ .

### Definisi 2.4

Suatu titik kesetimbangan dari sistem (2.2) disebut **sink** jika semua nilai eigen dari matriks  $Df(\mathbf{x}^*)$  mempunyai bagian real negatif ; Suatu titik kesetimbangan disebut **source** jika semua nilai eigen dari matriks  $Df(\mathbf{x}^*)$  mempunyai bagian real positif dan titik kesetimbangan disebut **saddle** jika titik kesetimbangan adalah titik kesetimbangan hiperbolik dan  $Df(\mathbf{x}^*)$  mempunyai minimal satu nilai eigen dengan bagian real positif dan minimal satu nilai eigen dengan bagian real negatif.

### Teorema 2.1

Jika  $\mathbf{x}^*$  adalah titik kesetimbangan hiperbolik dari sistem (2.1), maka terdapat sekitar dari  $\mathbf{x}^*$  di mana  $f$  secara topologi ekuivalen dengan sistem linear (2.2).

Misalkan  $\mathbf{x}^*$  adalah titik kesetimbangan dari sistem (2.1). Dengan mengambil ekspansi Taylor banyak variabel dari ruas kanan persamaan (2.1) diperoleh:

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{x}}{dt} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}) + \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}^*} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) + \dots \\ &= \left. \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}^*} (\mathbf{x} - \mathbf{x}^*) + \dots\end{aligned}\tag{2.3}$$

Derivatif-derivatif parsial dalam persamaan (2.3) diinterpretasikan sebagai **matriks Jacobi**. Jika komponen-komponen dari vektor  $\mathbf{x}$  adalah  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  dan komponen-komponen dari laju vektor  $\mathbf{f}$  adalah  $(f_1, f_2, \dots, f_n)$ , maka matriks Jacobi dari sistem adalah

$$J(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

### Definisi 2.5

Misalkan  $\mathbf{x}^*$  titik kesetimbangan dari  $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ . Maka  $\mathbf{x}^*$  disebut *titik kesetimbangan hiperbolik* jika tak satupun nilai-nilai eigen dari matriks Jacobi  $J(\mathbf{x}^*)$  mempunyai bagian riil nol. Sebaliknya,  $\mathbf{x}^*$  disebut *titik kesetimbangan tidak hiperbolik*.

### (2) Kestabilan Titik Kesetimbangan

Suatu titik kesetimbangan  $\mathbf{x}^*$  dikatakan *stabil* jika semua solusi cukup dekat ke  $\mathbf{x}^*$  untuk semua  $t \geq 0$ . Suatu titik kesetimbangan adalah *stabil asimtotik* jika solusi sebenarnya konvergen ke  $\mathbf{x}^*$  untuk  $t \rightarrow \infty$ .

### Definisi 2.6

Suatu titik kesetimbangan  $\mathbf{x}^*$  dari sistem (2.1) disebut *stabil* jika diberikan  $\varepsilon > 0$ , terdapat  $\delta(\varepsilon) > 0$  sedemikian sehingga untuk sebarang  $\mathbf{x}_0$  dengan  $|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_0| < \delta(\varepsilon)$ , solusi  $y(t, \mathbf{x}_0)$  dari sistem (2.1) melalui  $\mathbf{x}_0$  pada  $t=0$  memenuhi  $|y(t, \mathbf{x}_0) - \mathbf{x}^*| < \varepsilon$  untuk semua  $t \geq 0$ .

### Definisi 2.7

Suatu titik kesetimbangan  $\mathbf{x}^*$  dikatakan *tidak stabil* jika  $\mathbf{x}^*$  tidak stabil.

### Definisi 2.8

Suatu titik kesetimbangan  $\mathbf{x}^*$  dari sistem (2.1) dikatakan *stabil asimtotik* jika  $\mathbf{x}^*$  stabil dan terdapat konstanta  $c > 0$  sedemikian sehingga jika  $|\mathbf{x}^* - \mathbf{x}_0| < c$  maka  $|y(t, \mathbf{x}_0) - \mathbf{x}^*| \rightarrow 0$  untuk  $t \rightarrow \infty$ .

**Definisi 2.9**

Suatu titik kesetimbangan  $\mathbf{x}^*$  dikatakan **stabil asimtotik global** jika  $\mathbf{x}^*$  stabil asimtotik dan domain dari kestabilan asimtotik  $D_x = \left\{ \mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n \mid \lim_{t \rightarrow \infty} |y(t, \mathbf{x}_0)| = 0 \right\} = \mathbb{R}^n$ , yaitu setiap solusi  $y(t, \mathbf{x}_0)$  dari system (2.1) mempunyai sifat  $|y(t, \mathbf{x}_0) - \mathbf{x}^*| \rightarrow 0$  untuk  $t \rightarrow \infty$ .

**Teorema 2.2**

Jika semua nilai eigen dari  $Df(\mathbf{x}^*)$  mempunyai bagian real negatif, maka titik kesetimbangan  $\mathbf{x}^*$  dari sistem (2.1) adalah **stabil asimtotik lokal** dan **tak stabil** jika minimal dari nilai-nilai eigennya mempunyai bagian real positif.

**Teorema 2.3 Kriteria Routh-Hurwitz**

Misalkan diberikan persamaan karakteristik

$$P(\lambda) = |A - \lambda I| = \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \dots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \quad (2.5)$$

dengan  $A$  adalah matriks bujur sangkar dan koefisien-koefisien  $a_i$  adalah konstanta riil ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Didefinisikan  $n$  matriks Hurwitz menggunakan koefisien-koefisien  $a_i$  dari persamaan karakteristik:

$$H_1 = (a_1), \quad H_2 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 \\ a_3 & a_2 \end{pmatrix}, \quad H_3 = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 \\ a_5 & a_4 & a_3 \end{pmatrix}, \dots,$$

$$H_n = \begin{pmatrix} a_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_5 & a_4 & a_3 & a_2 & a_1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & a_{2n-3} & a_{2n-4} & a_{2n-5} & a_{2n-6} & \dots & a_n \end{pmatrix}.$$

Semua akar dari persamaan karakteristik  $P(\lambda) = 0$  adalah negatif atau mempunyai bagian riil negatif jika dan hanya jika  $|H_j| > 0$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ .

**Teorema 2.4**

Misalkan sebuah sistem persamaan diferensial mempunyai matriks Jacobi  $J = (m_{ij})$  dengan persamaan karakteristik

$$\lambda^2 + a_1 \lambda + a_2 = 0 \quad (2.6)$$

di mana  $a_1 = -\text{trace}(J) = -(m_{11} + m_{22})$  dan  $a_2 = \det(J) = m_{11} m_{22} - m_{12} m_{21}$ .



Sebuah titik tetap (titik kesetimbangan) akan stabil jika  $a_1 > 0$  dan  $a_2 > 0$ .

### (3) Fungsi Lyapunov

Fungsi Lyapunov dapat diketahui dari fungsi energi termodifikasi. Tidak terdapat metode yang umum untuk mengkonstruksi atau menentukan sebuah fungsi Lyapunov untuk membuktikan kestabilan dari sebuah titik kesetimbangan.

#### Definisi 2.10

Misalkan  $U$  adalah persekitaran dari  $\mathbf{x}^*$ . Fungsi  $V : U \rightarrow \mathbb{R}$  dikatakan sebagai **fungsi definit positif** jika

- (I)  $V(\mathbf{x}) > 0$  untuk semua  $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ .
- (ii)  $V(\mathbf{x}) = 0$  jika dan hanya jika  $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ .
- (iii)  $V(\mathbf{x}) \rightarrow 0$  untuk  $\mathbf{x} \rightarrow \infty$ .

#### Teorema 2.5

Jika terdapat fungsi definit positif  $V$  sedemikian sehingga  $\frac{dV}{dt} < 0$  di luar  $M$  dan  $\frac{dV}{dt} \leq 0$  pada  $M$  di mana  $M$  adalah himpunan yang tidak memuat bagian trayektori dalam dari titik  $O$ , maka titik kesetimbangan  $O$  adalah **stabil asimtotik**.

#### Teorema 2.6

Jika  $\mathbf{x}^*$  adalah titik kesetimbangan sistem (2.1) dan misalkan  $V : U \rightarrow \mathbb{R}$  adalah  $C^1$  fungsi yang didefinisikan pada persekitaran  $U$  dari  $\mathbf{x}^*$  sedemikian sehingga

- (i)  $V(\mathbf{x}^*) = 0$  dan  $V(\mathbf{x}) > 0$  jika  $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}^*$ .
- (ii)  $\frac{dV}{dt} \leq 0$  dalam  $U - \{\mathbf{x}\}$

maka  $\mathbf{x}^*$  stabil. Jika ditambah persyaratan (iii)  $\frac{dV}{dt} < 0$  dalam  $U - \{\mathbf{x}\}$ , maka  $\mathbf{x}^*$  asimtotik stabil.

Jika  $U$  dapat dipilih untuk semua  $\mathbb{R}^n$  dan jika (i) dan (iii) berlaku, maka  $\mathbf{x}^*$  dikatakan **stabil asimtotik global**.

#### (4) Prinsip Invariansi

Karena model epidemiologi umum memonitor populasi manusia, maka perlu memperhatikan ukuran populasi tidak pernah negatif. Jadi, model epidemiologi harus dipandang dalam daerah (fisibel) sehingga sifat nonnegatif dipenuhi.

##### Definisi 2.11

Titik  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  disebut titik  $\omega$ -limit dari  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ , dinotasi dengan  $\omega(\mathbf{x})$  jika terdapat barisan  $\{t_i\}$ ,  $t_i \rightarrow \infty$  sedemikian sehingga  $\phi(t_i, \mathbf{x}_i) \rightarrow \mathbf{x}_0$ .

##### Definisi 2.12

Himpunan dari semua titik  $\omega$ -limit dari suatu aliran (flow) disebut himpunan  $\omega$ -limit.

##### Definisi 2.13

Himpunan  $M$  adalah invarian jika dan hanya jika untuk semua  $\mathbf{x} \in M$ ,  $\phi(\mathbf{x}, t) \in M$  untuk semua  $t$ . Suatu himpunan adalah invarian positif (negatif) jika untuk setiap  $\mathbf{x} \in M$ ,  $\phi(\mathbf{x}, t) \in M$  untuk semua  $t > 0$  ( $t < 0$ ).

##### Teorema 2.7 (Prinsip Invariansi LaSalle)

Misalkan  $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$  adalah titik kesetimbangan sistem (2.1) dan  $V$  adalah fungsi Lyapunov pada suatu persekitaran  $U$  dari  $\mathbf{x}^* = \mathbf{0}$ . Jika  $\mathbf{x}_0 \in U$  mempunyai trayektori maju terbatas dengan titik-titik limit dalam  $U$  dan  $M$  adalah himpunan invarian terbesar dari  $E = \left\{ \mathbf{x}^* \in U \mid \frac{dV(\mathbf{x}^*)}{dt} = 0 \right\}$ , maka  $\phi(\mathbf{x}_0, t) \rightarrow M$  untuk  $t \rightarrow \infty$ .

##### Teorema 2.8 (Prinsip Invariansi Lyapunov-LaSalle)

Misalkan  $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  adalah fungsi Lyapunov untuk  $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = f(\mathbf{x})$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$  pada daerah  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Misalkan  $E = \left\{ \mathbf{x} \in \Omega \mid \frac{dV(\mathbf{x})}{dt} = 0 \right\}$  dan  $M$  adalah himpunan invarian terbesar dalam  $E$ . Maka setiap solusi terbatas  $\mathbf{x}(t)$  dalam  $\Omega$  menuju  $M$  untuk  $t \rightarrow \infty$ .



## BAB III

### TUJUAN DAN MANFAAT PENELITIAN

#### 3.1 Tujuan Penelitian

Penelitian ini bertujuan untuk:

- a. Mendapatkan model matematika sederhana yang dapat menerangkan sifat-sifat dari dinamika epidemik HIV/AIDS dengan pengaruh kelompok umur (anak-anak dan dewasa) dan kepadatan penduduk (kompetisi internal).
- b. Melakukan analisis dinamik dari modal (hasil (a)), khususnya menentukan titik kesetimbangan dan menentukan kestabilan (lokal dan global) titik kesetimbangan yang diturunkan secara analitik.
- c. Simulasi numerik menggunakan data kasus HIV/AIDS di Indonesia untuk memverifikasi hasil (b).

#### 3.2 Manfaat Penelitian

Manfaat dari hasil penelitian ini bagi institusi dan kontribusi pembangunan adalah:

- a. Bagi Institusi, penelitian akan memberikan penguatan penelitian kelompok Biomath dalam Kelompok Keahlian Matematika Terapan I di Jurusan Matematika FMIPA Universitas Brawijaya.
- b. Bagi kontribusi Pembangunan, penelitian akan menambah khasanah penelitian di bidang epidemiologi melalui model matematika dan hasilnya dapat dijadikan bahan pertimbangan dalam menyusun strategi penanggulangan HIV/AIDS di Indonesia.

## BAB IV

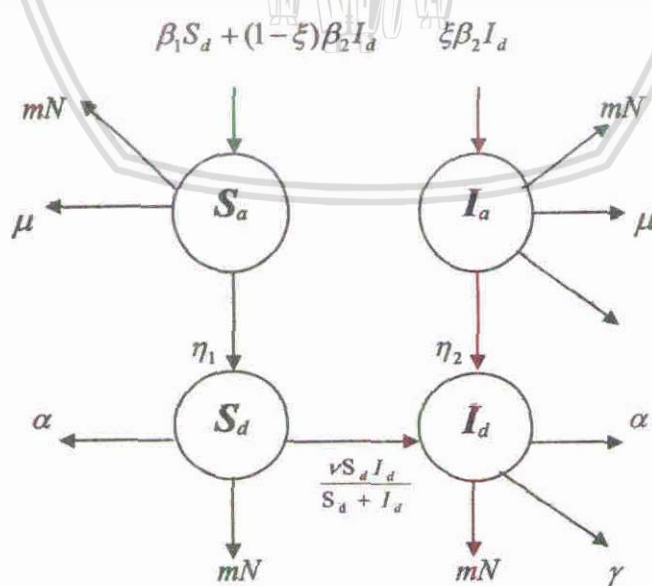
### METODE PENELITIAN

#### 3.1. Waktu, Tempat dan Data Penelitian

Penelitian ini dilaksanakan dalam 8 (delapan) bulan dari bulan April sampai dengan bulan Nopember 2011. Penelitian ini dilakukan di Laboratorium Matematika Jurusan Matematika Fakultas MIPA Universitas Brawijaya Malang. Data yang akan digunakan dalam penelitian ini adalah data sekunder berupa data demografik dan data empirik penyakit HIV/AIDS di Indonesia. Data empirik penyakit HIV/AIDS diperoleh dari Direktorat Jendral Penanggulangan Penyakit Menular dan Penyehatan Lingkungan (PPM & PLP) Departemen Kesehatan RI atau dari literatur-literatur yang relevan. Data demografik (jumlah penduduk) diambil dari Biro Pusat Statistik.

#### 3.2. Rancangan Penelitian

Model epidemik HIV/AIDS dideskripsikan menggunakan model kompartemen, di mana secara demografi populasi dibagi menjadi dua subpopulasi, yaitu kelompok anak-anak (0-14 tahun) dan kelompok dewasa (15 tahun ke atas). Secara epidemiologi, masing-masing subpopulasi terdiri dari dua kelompok, yaitu *susceptible* (anak-anak dan dewasa), *infected* (anak-anak dan dewasa). Secara skematis, transisi antara kedua subpopulasi disajikan dalam Gambar 3.1.



Gambar 3.1 Diagram kompartemen SI dengan dua kelompok umur

di mana

- $N$  adalah populasi total,
- $S_a$  adalah subpopulasi *susceptible* anak-anak,
- $I_a$  adalah subpopulasi *infected* anak-anak,
- $S_d$  adalah subpopulasi *susceptible* dewasa,
- $I_d$  adalah subpopulasi *infected* dewasa,
- $\beta_j$  ( $j = 1, 2$ ) adalah laju kelahiran per kapita subpopulasi (anak-anak atau dewasa),
- $\eta_j$  ( $j = 1, 2$ ) adalah laju maturasi per kapita subpopulasi (anak-anak atau dewasa),
- $\mu_j$  ( $j = 1, 2$ ) adalah laju kematian alami subpopulasi anak-anak,
- $\alpha$  adalah laju kematian per kapita dari individu dewasa,
- $\gamma$  adalah angka kematian per kapita dari penyakit,
- $\nu$  adalah peluang kontak antara individu *susceptible* dewasa dengan *infected* dewasa,
- $m$  adalah parameter kompetisi internal,
- $\xi$  ( $0 \leq \xi \leq 1$ ) adalah bagian yang lahir sehat dari ibu terinfeksi.

Diasumsikan tidak ada emigrasi/imigrasi, diinterpretasikan kedewasaan sebagai emigrasi dari tingkat anak-anak dan imigrasi ke dalam tingkat dewasa, individu tidak kebal, hanya individu dewasa yang dapat melahirkan, angka kematian kedua subpopulasi anak-anak identik terhadap angka kematian,  $\mu_j = \mu$  ( $j = 1, 2$ ) dan tidak ada infeksi karena kontak seksual dalam subpopulasi anak-anak.

### 3.3. Metode Analisis

Penelitian ini terdiri dari tiga tahap dan masing-masing tahap dianalisis dengan langkah-langkah sebagai berikut:

**Tahap 1:** Memperoleh model deterministik (*Model SI*) dinamika epidemik HIV/AIDS dengan pengaruh kelompok umur dan kompetisi internal:

- (i) Menghitung parameter-parameter model menggunakan rumus-rumus dari literatur yang relevan.
- (ii) Menentukan model deterministik (*Model SI*) berdasarkan desain penelitian menggunakan model persamaan diferensial nonlinear.



**Tahap 2:** Mengkaji secara analitik perilaku kualitatif model yang telah diperoleh menggunakan analisis dinamik:

- (i) Menentukan titik-titik kesetimbangan model. (ii) Melakukan analisis kestabilan terhadap titik-titik kesetimbangan (lokal dan global).
- Kestabilan lokal dikaji menggunakan konsep nilai eigen dari Matriks Jacobi sistem, yaitu: jika semua nilai eigen matriks Jacobi dari model bernilai real negatif, maka titik kesetimbangan model adalah stabil asimtotik lokal.
  - Kestabilan global dikaji menggunakan Prinsip Invariansi Lyapunov-LaSalle, yaitu: Misalkan  $V: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  adalah fungsi Lyapunov untuk  $\dot{x} = f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  pada daerah  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Misalkan  $E = \{x \in \Omega \mid V(x) = 0\}$  dan  $M$  adalah himpunan invarian terbesar dalam  $E$ . Maka setiap solusi terbatas  $x(t)$  dalam  $\Omega$  menuju  $M$  untuk  $t \rightarrow \infty$ .

**Tahap 3:** Mengkaji secara numerik perilaku kualitatif model yang telah diperoleh menggunakan alat bantu program Matlab dan Maple :

- (i) Plotting solusi numerik dari masing-masing subpopulasi ( $S_a$ ,  $I_a$ ,  $S_d$  dan  $I_d$ ) terhadap waktu.
- (ii) Verifikasi hasil (i) dengan hasil dari Tahap 2.



## BAB V

### HASIL DAN PEMBAHASAN

#### 5.1 Model Epidemik HIV/AIDS dengan Kelompok Umur dan Kepadatan Penduduk

Model epidemik HIV/AIDS dengan kelompok umur dan kepadatan penduduk dideskripsikan menggunakan model kompartemen, di mana secara demografi populasi dibagi menjadi dua subpopulasi, yaitu kelompok anak-anak dan kelompok dewasa. Secara epidemiologi, masing-masing subpopulasi terdiri dari dua kelompok, yaitu *Susceptibles* ( $S_a$  dan  $S_d$ ) dan *Infected* ( $I_a$  dan  $I_d$ ). Berdasarkan Gambar 1, transisi antara kedua subpopulasi dapat disajikan ke dalam model matematika berbentuk sistem persamaan diferensial nonlinear sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dS_a}{dt} &= \beta_1 S_d + (1-\xi)\beta_2 I_d - \eta_1 S_a - \mu S_a - m_a N \\ \frac{dS_d}{dt} &= \eta_1 S_a - \frac{w_d I_d}{S_d + I_d} - \alpha S_d - m_d N \\ \frac{dI_a}{dt} &= \xi\beta_2 I_d - \eta_2 I_a - \mu I_a - \gamma I_a - m_a N \\ \frac{dI_d}{dt} &= \eta_2 I_a + \frac{w_d I_d}{S_d + I_d} - \alpha I_d - \gamma I_d - m_d N\end{aligned}\tag{5.1}$$

dengan

$$N = S_a + I_a + S_d + I_d.\tag{5.2}$$

Diasumsikan bahwa dalam model ini penyakit tanpa *recovery* dan perubahan populasi total adalah konstan.

#### 5.2 Eksistensi, Ketunggalan dan Keterbatasan Solusi

Misalkan  $\mathbb{R}_+^4 = (0, \infty)$  adalah himpunan vektor-vektor positif  $X = (S_a, S_d, I_a, I_d)$  dengan  $S_a > 0, S_d > 0, I_a > 0, I_d > 0$ . Misalkan  $F: \mathbb{R}_+^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ ,  $F(X) = (F_1(X), F_2(X), F_3(X), F_4(X))$  adalah fungsi kontinu di mana  $F_i(X)$  adalah fungsi (persamaan ke- $i$ ) pada ruas kanan sistem (5.1) yang mempunyai derivatif-derivatif parsial terhadap  $S_a, S_d, I_a$  dan  $I_d$  dan kontinu di  $\mathbb{R}_+^4$ . Maka  $F$  adalah kontinu Lipschitz lokal di

$\mathbb{R}_+^4$ . Dengan demikian, ada jaminan eksistensi dan ketunggalan solusi  $(S_a, S_d, I_a, I_d)$  untuk sistem (5.1) jika memenuhi kondisi awal  $S_a = S_a^0, S_d = S_d^0, I_a = I_a^0, I_d = I_d^0$  dan  $S_a^0 \geq 0, S_d^0 \geq 0, I_a^0 \geq 0$  dan  $I_d^0 \geq 0$ .

Semua solusi dari sistem (5.1) adalah terbatas uniform, dibuktikan sebagai berikut:

Misalkan  $X = (S_a(t), S_d(t), I_a(t), I_d(t))$  adalah solusi dari sistem (5.1) dengan

$N(t) = S_a(t) + S_d(t) + I_a(t) + I_d(t)$  dan  $\beta = \max\{\beta_1, \beta_2\}$ . Maka

$$\begin{aligned} \frac{dN}{dt} &= \frac{dS_a}{dt} + \frac{dS_d}{dt} + \frac{dI_a}{dt} + \frac{dI_d}{dt} \\ &= -\mu S_a + (\beta_1 - \alpha)S_d - (\mu + \gamma)I_a + (\beta_2 - \alpha - \gamma)I_d - mN^2 \\ &\leq \beta(S_d + I_d) - mN^2 \leq \beta N - mN^2 = N(\beta - mN). \end{aligned}$$

Akan ditunjukkan  $N(t) \leq M$  untuk  $t \geq 0$  dan  $M = \max\{N(0), \frac{\beta}{m} + 1\}$ .

- Misalkan  $M = \frac{\beta}{m} + 1$  dan andaikan terdapat  $t_1 > 0$  sedemikian sehingga

$$N(t_1) = \frac{\beta}{m} + 1, N(t) < \frac{\beta}{m} + 1 \ (t < t_1) \text{ dan } \frac{dN(t_1)}{dt} \geq 0. \quad (*)$$

$$\begin{aligned} \text{Maka } \frac{dN(t_1)}{dt} &\leq \beta N(t_1) - mN^2(t_1) = \beta\left(\frac{\beta}{m} + 1\right) - m\left(\frac{\beta}{m} + 1\right)^2 \\ &= [\beta - m\left(\frac{\beta}{m} + 1\right)]\left(\frac{\beta}{m} + 1\right) = -m\left(\frac{\beta}{m} + 1\right). \end{aligned}$$

Ini berarti,  $\frac{dN(t_1)}{dt} < 0$ . Kontradiksi dengan (\*).

- Misalkan  $M = N(0)$  dan andaikan terdapat  $t_1 > 0$  sedemikian sehingga

$$N(t_1) = M \text{ dan } \frac{dN(t_1)}{dt} \geq 0. \quad (**)$$

$$\text{Maka } \frac{dN(t_1)}{dt} \leq \beta N(t_1) - mN^2(t_1) = \beta M - mM^2 = M(\beta - mM).$$

$$\text{Karena } \frac{\beta}{m} < \frac{\beta}{m} + 1 \leq M, \text{ maka } \beta - mM < 0 \text{ dan } \frac{dN(t_1)}{dt} < 0.$$

Kontradiksi dengan (\*\*). Ini berarti, tidak benar terdapat  $t_1 > 0$  sehingga memenuhi (\*) atau (\*\*). Jadi, terbukti  $N(t) \leq M$  untuk  $t \geq 0$  atau semua solusi dari sistem (5.1) adalah terbatas uniform.

### 5.3 Analisis Kestabilan Model

Titik kesetimbangan model epidemik HIV/AIDS dengan kelompok umur dan kepadatan penduduk diperoleh dari sistem (5.1) dengan menyamakan ruas kanan sama dengan nol, diperoleh kondisi kesetimbangan

$$\beta_1 S_a + (1 - \xi) \beta_2 I_d - \eta_1 S_a - \mu S_a - m S_a N = 0 \quad (5.3)$$

$$\eta_1 S_a - \frac{\nu S_d I_d}{S_d + I_d} - \alpha S_d - m S_d N = 0 \quad (5.4)$$

$$\xi \beta_2 I_d - \eta_2 I_a - \mu I_a - \gamma I_a - m I_a N = 0 \quad (5.5)$$

$$\eta_2 I_a + \frac{\nu S_d I_d}{S_d + I_d} - \alpha I_d - \gamma I_d - m I_d N = 0 \quad (5.6)$$

#### 5.3.1 Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan Trivial

Sistem (5.1) mempunyai titik kesetimbangan trivial  $E_0^* = (0, 0, 0, 0)$ . Karena  $f(I_a, I_d)$  tidak diferensibel pada  $(I_a, I_d) = (0, 0)$ , maka analisis kestabilan pada titik kesetimbangan trivial tidak dapat dilakukan dengan metode linearisasi.

#### 5.3.2 Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

Dari kondisi kesetimbangan (5.5) dan (5.6), diperoleh  $I_a^* = 0$  dan  $I_d^* = 0$  dan diperoleh titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_1^* = (S_a^*, S_d^*, 0, 0)$ . Dengan demikian, titik kesetimbangan bebas penyakit terjadi jika tidak ada individu yang terinfeksi dalam subpopulasi anak-anak ( $I_a^* = 0$ ) dan subpopulasi dewasa ( $I_d^* = 0$ ). Dengan mensubstitusikan  $I_a^* = 0$  dan  $I_d^* = 0$  ke persamaan (5.3)-(5.6), kondisi kesetimbangan menjadi

$$-(\eta_1 + \mu) S_a^* + \beta_1 S_d^* - m S_a^* (S_a^* + S_d^*) = 0 \quad (5.7)$$

$$\eta_1 S_a^* - \alpha S_d^* - m S_d^* (S_a^* + S_d^*) = 0. \quad (5.8)$$

Dengan menyelesaikan persamaan (5.7) dan (5.8) diperoleh

$$S_a^* = \frac{\alpha S_d^* + m (S_d^*)^2}{\eta_1 - m S_d^*} \quad \text{dan} \quad S_d^* = \frac{(\eta_1 + \mu) S_a^* + m (S_a^*)^2}{\beta_1 - m S_a^*} \quad (5.9)$$

dengan  $S_a^* < \frac{\beta_1}{m}$  dan  $S_d^* < \frac{\eta_1}{m}$ . Karena  $N_1^* = S_a^* + S_d^*$ , maka bentuk matriks kondisi

kesetimbangan (5.7) –(5.8) menjadi



Sistem (5.10) mempunyai solusi positif  $(S_a^*, S_d^*)$  jika determinan matriks dalam sistem (5.4) adalah nol, yaitu

$$(5.10) \quad \begin{bmatrix} -(\eta_1 + \mu + mN_1^*) & \eta_1 \\ \beta_1 & -(\alpha + mN_1^*) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_a^* \\ S_d^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} m^2 N_1^{*2} + m(\eta_1 + \mu + \alpha)N_1^* + [\alpha(\eta_1 + \mu) - \beta_1 \eta_1] &= 0 \\ mN_1^{*2} + (\eta_1 + \mu + \alpha)N_1^* + \frac{m}{\alpha}[\alpha(\eta_1 + \mu) - \beta_1 \eta_1] &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow N_1^* &= \frac{-(\eta_1 + \mu + \alpha) + \sqrt{(\eta_1 + \mu + \alpha)^2 - 4[\alpha(\eta_1 + \mu) - \beta_1 \eta_1]}}{2m} \\ \Rightarrow N_1^* &= \frac{-(\eta_1 + \mu + \alpha) + \sqrt{(\eta_1 + \mu + \alpha)^2 - 4[\alpha(\eta_1 + \mu) - \beta_1 \eta_1]}}{2m} \end{aligned}$$

dengan syarat  $\alpha(\eta_1 + \mu) - \beta_1 \eta_1 < 0$  atau  $R_1 > 1$ . Nilai ambang  $R_1 = \left( \frac{\beta_1}{\alpha} \right) \left( \frac{\eta_1}{\eta_1 + \mu} \right)$  didefinisikan sebagai rasio reproduksi *susceptible* atau rata-rata jumlah bayi *susceptible* yang dilahirkan oleh individu *susceptible* selama hidupnya (Lopez *et al.*, 2007).

Dengan mensubstitusikan nilai  $N_1^*$  ke dalam sistem (4.10) diperoleh

$$(5.11) \quad S_a^* = \frac{(\alpha + mN_1^*)N_1^*}{\alpha + \eta_1 + mN_1^*} \text{ dan } S_d^* = \frac{\eta_1 N_1^*}{\alpha + \eta_1 + mN_1^*}.$$

Jadi, sistem (5.1) mempunyai titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_1^* = (S_a^*, S_d^*, 0, 0)$  dengan  $S_a^*$  dan  $S_d^*$  ditunjukkan dalam persamaan (5.11) jika  $R_1 > 1$ . Selanjutnya, analisis kestabilan dari titik kesetimbangan  $E_1^* = (S_a^*, S_d^*, 0, 0)$  ditunjukkan sebagai berikut.

### 5.3.2.1 Kestabilan Lokal Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

Matriks Jacobi dari model (5.1) pada titik kesetimbangan  $E_1^* = (S_a^*, S_d^*, I_a^*, I_d^*)$  adalah



$$J(E) = \begin{pmatrix} -[\eta_1 + \mu + m(S_a^* + N_1^*)] & \beta_1 - mS_a^* & -mS_a^* & (1-\xi)\beta_2 - mS_a^* \\ \eta_1 - mS_a^* & \frac{vI_d^2}{(S_a^* + I_d^*)^2} - [\alpha + m(S_a^* + N_1^*)] & -mS_a^* & \frac{vS_a^2}{(S_a^* + I_d^*)^2} - mS_a^* \\ -mI_d^* & -mI_d^* & -(\eta_2 + \mu + \gamma + m(I_a^* + N_1^*)) & \xi\beta_2 - mI_d^* \\ -mI_d^* & \frac{vI_d^2}{(S_a^* + I_d^*)^2} - mI_d^* & \eta_2 - mI_d^* & \frac{vS_a^2}{(S_a^* + I_d^*)^2} - (\alpha + \gamma + m(I_a^* + N_1^*)) \end{pmatrix}$$

Matriks Jacobi dari model (5.1) pada titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_1^* = (S_a^*, S_d^*, 0, 0)$  adalah

$$J(E_1^*) = \begin{pmatrix} -[\eta_1 + \mu + m(S_a^* + N_1^*)] & \beta_1 - mS_a^* & -mS_a^* & (1-\xi)\beta_2 - mS_a^* \\ \eta_1 - mS_a^* & -[\alpha + m(S_a^* + N_1^*)] & -mS_a^* & -(\nu + mS_a^*) \\ 0 & 0 & -(\eta_2 + \mu + \gamma + mN_1^*) & \xi\beta_2 \\ 0 & 0 & \eta_2 & \nu - (\alpha + \gamma + mN_1^*) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} B_1 & B_3 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}.$$

di mana matriks-matriks  $B_1, B_2, B_3$  dan  $0$  adalah matriks berukuran  $2 \times 2$  dengan  $0$  adalah matriks nol.

Untuk menunjukkan bahwa nilai-nilai eigen dari matriks Jacobi  $J(E_1^*)$  adalah negatif cukup ditunjukkan bahwa nilai-nilai eigen dari matriks  $B_1$  dan  $B_2$  adalah negatif. Karena  $B_1$  dan  $B_2$  matriks berukuran  $2 \times 2$ , untuk menunjukkan bahwa nilai-nilai eigennya negatif cukup ditunjukkan bahwa nilai *traceny* negatif dan nilai determinannya positif.

- $trace(B_1) = -[\eta_1 + \mu + m(S_a^* + N_1^*)] - [\alpha + m(S_a^* + N_1^*)] = -[\eta_1 + \mu + \alpha + m(S_a^* + S_d^* + 2N_1^*)]$
- $trace(B_2) = -(\eta_2 + \mu + \gamma + mN_1^*) + [\nu - (\alpha + \gamma + mN_1^*)] = -[\eta_2 + \mu + \gamma + 2mN_1^*] + (\alpha + \gamma - \nu)$
- $det(B_1) = \{-[\eta_1 + \mu + m(S_a^* + N_1^*)]\} \{-[\alpha + m(S_a^* + N_1^*)]\} - (\eta_1 - mS_a^*)(\beta_1 - mS_a^*)$   
 $= mS_a^*(\eta_1 + \alpha + mN_1^*) + mS_a^*(\eta_1 + \mu + \beta_1 + mN_1^*)$

Dari persamaan (5.10),  $\beta_1\eta_1 = (\alpha + mN_1^*)(\eta_1 + \mu + \alpha + mN_1^*)$ .

- $det(B_2) = \{-[\eta_2 + \mu + \gamma + mN_1^*]\} \{\nu - (\alpha + \gamma + mN_1^*)\} - \beta_2\eta_2\xi$   
 $= (mN_1^*)^2 + (\eta_2 + \mu + \gamma)(\alpha + \gamma - \nu - \frac{\xi\beta_2\eta_2}{\eta_2 + \mu + \gamma}) - mN_1^*(\nu - \eta_2 - \mu - \alpha - 2\gamma)$   
 $= (mN_1^*)^2 + (\eta_2 + \mu + \gamma)(\alpha + \gamma)[1 - (R_0 + R_2)] + mN_1^*[(\alpha + \gamma - \nu) + \eta_2 + \mu + \gamma]$

Karena semua parameter diasumsikan positif, maka  $trace(B_1) < 0$  dan  $det(B_1) > 0$ .

Selanjutnya  $\text{trace}(\mathbf{B}_2) < 0$  jika diasumsikan  $\alpha + \gamma > \nu$  atau  $R_2 < 1$  di mana  $R_2 = \frac{\nu}{\alpha + \gamma}$  adalah laju kontak *infectious*, yaitu rata-rata jumlah kontak dari individu *infected* dewasa selama hidupnya. Nilai  $\det(\mathbf{B}_2) > 0$  jika  $R_0 + R_2 \leq 1$  di mana  $R_0 = \left( \frac{\xi \beta_2}{\alpha + \gamma} \right) \left( \frac{\eta_2}{\eta_2 + \mu + \gamma} \right)$  adalah rasio reproduksi subpopulasi *infected*, yaitu rata-rata jumlah bayi *infected* yang dilahirkan oleh individu *infected* selama hidupnya (Lopez *et al.*, 2007).

Jadi, titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_1^*$  adalah stabil asimtotik lokal jika  $R_2 < 1$  dan  $R_0 + R_2 \leq 1$ .

### 5.3.2.2 Kestabilan Global Titik Kesetimbangan Bebas Penyakit

Lopez *et al.* (2007) telah menunjukkan bahwa solusi trivial dari sistem *repeller* atau  $\limsup_{t \rightarrow \infty} N(t) > 0$  jika  $R_1 > \frac{(\eta_1 + \mu)(\nu + \alpha)}{\eta_1 \alpha}$ . Didefinisikan fungsi Lyapunov

$$V: \Omega = \{(S_a, S_d, I_a, I_d) \in \mathbb{R}_+^4 \mid I_a, I_d > 0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

dengan  $V(X) = \omega_2 I_a + I_d$ ,  $X = (S_a, S_d, I_a, I_d) \in \mathbb{R}_+^4$ ,  $\omega_2 = \frac{\eta_2}{\eta_2 + \mu + \gamma}$ .

Maka turunan dari  $V(X)$  sepanjang solusi untuk sistem (5.1) adalah

$$\begin{aligned} \frac{dV(X)}{dt} &= \omega_2 (\xi \beta_2 I_d - \eta_2 I_a - \mu I_a - \gamma I_a - m I_a N) + (\eta_2 I_a - \frac{\nu S_d I_d}{S_d + I_d} \\ &\quad - \alpha I_d - \gamma I_d - m I_d N) \\ &= (\eta_2 + \mu + \gamma) \left( \frac{\eta_2}{\eta_2 + \mu + \gamma} - \omega_2 \right) I_a + (\omega_2 \xi \beta_2 - (\alpha + \gamma) I_d + \frac{\nu S_d I_d}{S_d + I_d} - m V N) \\ &\leq (\alpha + \gamma - \nu) \left( \frac{\xi \beta_2 \eta_2}{(\eta_2 + \mu + \gamma)(\alpha + \gamma - \nu)} - 1 \right) I_d - m V N. \end{aligned}$$

Karena diasumsikan  $\alpha + \gamma > \nu$  atau  $R_2 < 1$ , maka  $\frac{\xi \beta_2 \eta_2}{(\eta_2 + \mu + \gamma)(\alpha + \gamma - \nu)} < 1$ . Menurut Lopez *et al.*

(2007),  $\frac{\xi \beta_2 \eta_2}{(\eta_2 + \mu + \gamma)(\alpha + \gamma - \nu)} < 1$  ekuivalen dengan  $R_0 + R_2 \leq 1$ . Jadi,  $\frac{dV(X)}{dt} \leq 0$  untuk  $X \in \mathbb{R}_+^4$ .

$\frac{dV(X)}{dt} = 0$  jika dan hanya jika  $S_a = S_a^*$ ,  $S_d = S_d^*$ ,  $I_a = 0$  dan  $I_d = 0$ .

Oleh karena itu, himpunan invarian terbesar dalam

$$\{X \in \mathbb{R}_+^4 \mid \frac{dV(X)}{dt} = 0\} = \{(S_a, S_d, 0, 0) \mid S_a \geq 0, S_d \geq 0\}$$

adalah singleton  $\{E_1^*\} = \{(S_a^*, S_d^*, 0, 0)\}$ . Menurut Prinsip Invariansi Lyapunov-LaSalle, semua solusi positif dari sistem (4.1) menuju  $E_1^*$  untuk  $t \rightarrow \infty$ .

Jadi, titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_1^* = (S_a^*, S_d^*, 0, 0)$  stabil global dalam  $R_+^4$  jika  $R_1 > \frac{(\eta_1 + \mu)(\nu + \alpha)}{\eta_1 \alpha}$  dan  $R_2 \leq 1 - R_0$ .

### 5.3.3 Analisis Kestabilan Titik Kesetimbangan Kepunahan *Susceptible*

Dari kondisi kesetimbangan (5.3) dan (5.4), diperoleh  $S_a^* = 0$  dan  $S_d^* = 0$  dan diperoleh titik kesetimbangan kepunahan *susceptible* (*susceptible extinction*)  $E_2^* = (0, 0, I_a^*, I_d^*)$ . Dengan demikian, titik kesetimbangan kepunahan *susceptible* terjadi jika tidak ada individu sehat dalam subpopulasi anak-anak ( $S_a^* = 0$ ) dan tidak ada individu sehat dalam subpopulasi dewasa ( $S_d^* = 0$ ). Dengan mensubstitusikan  $S_a^* = 0$  dan  $S_d^* = 0$  ke persamaan (5.3)-(5.6), kondisi kesetimbangan menjadi

$$\begin{aligned} (1 - \xi)\beta_2 I_d^* &= 0 \\ -(\eta_2 + \mu + \gamma)I_a^* + \beta_2 I_d^* - mI_a^*(I_a^* + I_d^*) &= 0 \\ \eta_2 I_a^* - (\alpha + \gamma)I_d^* - mI_d^*(I_a^* + I_d^*) &= 0. \end{aligned} \quad (5.12)$$

(i) Kasus  $\xi = 1$ .

Jika semua anak yang lahir dari ibu terinfeksi adalah terinfeksi, maka terdapat titik kesetimbangan kepunahan *susceptible*  $E_2^* = (0, 0, I_a^*, I_d^*)$ . Dari persamaan kedua dan ketiga sistem (5.12) diperoleh

$$I_a^* = \frac{(\alpha + \gamma + mI_d^*)I_d^*}{\eta_2 - mI_d^*} \quad \text{dan} \quad I_d^* = \frac{(\eta_2 + \mu + \gamma + mI_a^*)I_a^*}{\beta_2 - mI_a^*}$$

dengan  $I_a^* < \frac{\beta_2}{m}$  dan  $I_d^* < \frac{\eta_2}{m}$ . Karena  $N_2^* = I_a^* + I_d^*$ , maka bentuk matriks persamaan kedua dan ketiga sistem (5.12) adalah

$$\begin{bmatrix} -(\eta_2 + \mu + \gamma + mN_2^*) & \beta_2 \\ \eta_2 & -(\alpha + \gamma + mN_2^*) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a^* \\ I_d^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5.13)$$



daa mempunyai solusi positif  $(I_a^*, I_d^*)$  jika determinan matriks dalam sistem (5.13) adalah nol, yaitu

$$\begin{aligned}
 & m^2 N_2^{*2} + m(\eta_2 + \mu + \alpha + 2\gamma)N_2^* + [(\alpha + \gamma)(\eta_2 + \mu + \gamma) - \beta_2 \eta_2] = 0 \\
 \Leftrightarrow & mN_2^{*2} + (\eta_2 + \mu + \alpha + 2\gamma)N_2^* + \frac{1}{m}[(\alpha + \gamma)(\eta_2 + \mu + \gamma) - \beta_2 \eta_2] = 0 \\
 \Leftrightarrow & N_2^* = \frac{-(\eta_2 + \mu + \alpha + 2\gamma)}{2m} \\
 & \quad + \frac{\sqrt{(\eta_2 + \mu + \alpha + 2\gamma)^2 - 4[(\alpha + \gamma)(\eta_2 + \mu + \gamma) - \beta_2 \eta_2]}}{2m} \\
 \Leftrightarrow & N_2^* = \frac{-(\eta_2 + \mu + \alpha + 2\gamma) + \sqrt{(\eta_2 + \mu + \alpha + 2\gamma)^2 - 4[(\alpha + \gamma)(\eta_2 + \mu + \gamma)(1 - R_0)]}}{2m}
 \end{aligned}$$

dengan syarat  $(\alpha + \gamma)(\eta_2 + \mu + \gamma) - \beta_2 \eta_2 < 0$  atau  $R_0 > 1$ . Dengan mensubstitusikan nilai  $N_2^*$  ke dalam persamaan dalam sistem (5.12) diperoleh

$$I_a^* = \frac{(\alpha + \gamma + mN_2^*)N_2^*}{\alpha + \eta_2 + \gamma + mN_2^*} \text{ dan } I_d^* = \frac{\eta_2 N_2^*}{\alpha + \eta_2 + \gamma + mN_2^*}. \quad (5.14)$$

Jadi, sistem (5.1) mempunyai titik kesetimbangan kepunahan *susceptible*  $E_2^* = (0, 0, I_a^*, I_d^*)$  dengan  $I_a^*$  dan  $I_d^*$  ditunjukkan dalam persamaan (5.14) jika  $R_0 > 1$  dan  $\xi = 1$ .

(ii) Kasus  $0 \leq \xi < 1$ . Jika anak yang lahir dari ibu terinfeksi adalah sehat, maka tidak terdapat titik kesetimbangan kepunahan *susceptible*  $E_2^*$  sebab dari sistem (5.13),  $I_a^* = I_d^* = 0$ .

Selanjutnya, analisis kestabilan dari titik kesetimbangan  $E_1^*$  ditunjukkan sebagai berikut.

### 5.3.3.1 Kestabilan Lokal Titik Kesetimbangan Kepunahan *Susceptible*

Matriks Jacobi dari model (5.1) pada titik kesetimbangan  $E_2^* = (0, 0, I_a^*, I_d^*)$  untuk kasus  $\xi = 1$  adalah



$$J(E_2^*) = \begin{bmatrix} -(\eta_1 + \mu + mN_2^*) & \beta_1 & 0 & 0 \\ \eta_1 & -(\nu + \alpha + mN_2^*) & 0 & 0 \\ -mI_a^* & -mI_a^* & -[\eta_2 + \mu + \gamma + m(I_a^* + N_2^*)] & \beta_2 - mI_a^* \\ -mI_d^* & \nu - mI_d^* & \eta_2 - mI_d^* & -[\alpha + \gamma + m(I_d^* + N_2^*)] \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} G_1 & 0 \\ G_3 & G_2 \end{bmatrix}$$

di mana matriks-matriks  $G_1, G_2, G_3$  dan  $0$  adalah matriks berukuran  $2 \times 2$  dengan  $0$  adalah matriks nol.

Untuk menunjukkan bahwa nilai-nilai eigen dari matriks Jacobi  $J(E_2^*)$  adalah negatif cukup ditunjukkan bahwa nilai-nilai eigen dari matriks  $G_1$  dan  $G_2$  adalah negatif, yaitu cukup ditunjukkan bahwa nilai *tracenya* negatif dan nilai *determinannya* positif.

- $\text{trac}(G_1) = -(\eta_1 + \mu + mN_2^*) - (\nu + \alpha + mN_2^*) = -[\eta_1 + \mu + \nu + \alpha + 2mN_2^*]$
- $\text{trac}(G_2) = -[\eta_2 + \mu + \gamma + m(I_a^* + N_2^*)] - [\alpha + \gamma + m(I_d^* + N_2^*)] = -[\eta_2 + \mu + 2\gamma + \alpha + m(I_a^* + I_d^* + 2N_2^*)]$
- $\det(G_1) = (\eta_1 + \mu + mN_2^*)(\nu + \alpha + mN_2^*) - \beta_1\eta_1$   
 $= [(\eta_1 + \mu)\alpha - \beta_1\eta_1] + (\eta_1 + \mu)(\nu + mN_2^*)(\nu + \alpha + mN_2^*)$   
 $= \alpha(\eta_1 + \mu)(1 - R_1) + (\eta_1 + \mu)(\nu + mN_2^*)(\nu + \alpha + mN_2^*)$
- $\det(G_2) = [\eta_2 + \mu + \gamma + m(I_a^* + N_2^*)][\alpha + \gamma + m(I_d^* + N_2^*)] - (\eta_2 - mI_d^*)(\beta_2 - mI_a^*)$   
 $= [\eta_2 + \mu + \gamma + m(I_a^* + N_2^*)][\alpha + \gamma + m(I_d^* + N_2^*)] + (\alpha + \gamma + mI_d^*)(\eta_2 + \mu + \gamma + mI_a^*)$

Karena semua parameter diasumsikan positif, maka  $\text{trace}(G_1) < 0$  dan  $\det(G_1) > 0$ .

$R_1 \geq 1$ . Selanjutnya, jelas  $\text{trace}(G_2) < 0$  dan  $\det(G_2) > 0$ .

Jadi, titik kesetimbangan kepunahan *susceptible*  $E_2^*$  adalah stabil asimtotik lokal jika  $R_1 < 1$ ,  $R_0 > 1$  dan  $\xi = 1$ .

### 5.3.3.2 Kestabilan Global Titik Kesetimbangan Kepunahan *Susceptible*

Lopez *et al.* (2007) telah menunjukkan bahwa solusi trivial dari sistem *repeller* atau  $\limsup_{t \rightarrow \infty} N(t) > 0$  jika  $R_0 > \frac{\mu + \eta_2 + \gamma}{\eta_2}$ . Selanjutnya didefinisikan fungsi Lyapunov

$$V : \{(S_a, S_d, I_a, I_d) \in \mathbb{R}_+^4 \mid I_a, I_d > 0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

dengan  $V(X) = \omega_1 S_a + S_d$ ,  $X = (S_a, S_d, I_a, I_d) \in \mathbb{R}_+^4$ ,  $\omega_1 = \frac{\eta_1}{\eta_1 - \mu}$ .

Maka turunan dari  $V$  sepanjang solusi dari sistem (1) adalah

$$\begin{aligned}\frac{dV}{dt} &= \omega_1 (\beta_1 S_a + (1-\xi)\beta_2 I_a - \eta_1 S_a - \mu S_a - mS_a N) + (\eta_1 S_a - \frac{\nu S_a I_a}{S_a + I_a} - \alpha S_a \\ &\quad - mS_a N) \\ &= (\eta_1 + \mu) \left( \frac{\eta}{\eta_1 + \mu} - \omega_1 \right) S_a + (\delta_1 \beta_1 - \alpha) S_a - \frac{\nu S_a I_a}{S_a + I_a} - mVN \\ &= \alpha(R_1 - 1)S_a - \frac{\nu S_a I_a}{S_a + I_a} - mVN.\end{aligned}$$

Karena  $R_1 \leq 1$ , maka  $\frac{dV(X)}{dt} \leq 0$  untuk  $X \in \mathbb{R}_+^4$ . Selanjutnya,  $\frac{dV(X)}{dt} = 0$  hanya jika

$S_a = S_d = 0$  atau  $\xi = 1$ . Himpunan invarian maksimum dalam  $\{X \in \mathbb{R}_+^4 \mid \frac{dV(X)}{dt} = 0\}$  adalah singleton  $\{E_2^*\} = \{(0, 0, I_a^*, I_d^*)\}$ . Menggunakan Prinsip Invariansi Lyapunov-LaSalle, semua solusi positif dari sistem (5.1) menuju  $E_2^*$  untuk  $t \rightarrow \infty$ .

Jadi, titik kesetimbangan kepunahan *susceptible*  $E_2^* = (0, 0, I_a^*, I_d^*)$  stabil global dalam  $\mathbb{R}_+^4$  jika  $R_1 \leq 1$ ,  $\xi = 1$  dan  $R_0 > \frac{\mu + \eta_2 + \gamma}{\eta_2}$ .

#### 5.4 Implementasi Model Epidemik HIV/AIDS di Indonesia

Berdasarkan data Biro Pusat Statistik (Anonim, 2010a), jumlah penduduk Indonesia (populasi) pada Tahun 2009 tercatat sebesar 231369992 jiwa dengan tingkat kepadatan penduduk sebesar 121 jiwa/km<sup>2</sup>. Komposisi penduduk Indonesia berdasarkan kelompok umur menunjukkan bahwa penduduk yang berusia muda atau kelompok anak-anak (0-14 tahun) sebesar 26,96% atau berjumlah 62377.242 jiwa dan kelompok dewasa ( $\geq 15$  tahun) sebesar 73,04% atau berjumlah 168.992.230 jiwa. Komposisi penduduk berdasarkan jenis kelamin menunjukkan bahwa anak laki-laki berjumlah 31.810.108 jiwa, anak perempuan berjumlah 62.373.727 jiwa, laki-laki dewasa berjumlah 84.007.837 jiwa dan perempuan dewasa berjumlah 53.187.920 jiwa.

Penyakit HIV (*human immunodeficiency virus*) dan AIDS (*acquired immunodeficiency syndrome*) di Indonesia senantiasa meningkat dari tahun ke tahun. Berdasarkan data dari Ditjen PP dan PL Depkes RI (Anonim, 2010b), kasus AIDS kumulatif yang dilaporkan dari 1 Januari 1987 sampai dengan 31 Desember 2009 berjumlah 19.973 jiwa terdiri dari 14.765 laki-laki dan 5.208 perempuan. Komposisi berdasarkan kelompok umur menunjukkan bahwa terdapat 528 anak-anak dan 19.445 dewasa. Jumlah kasus AIDS



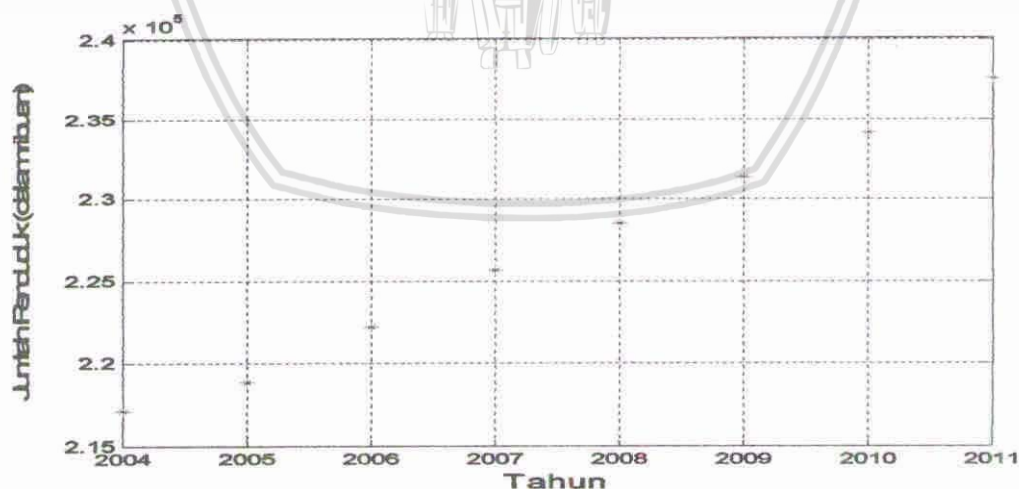
yang dilaporkan dari 1 Januari sampai dengan 31 Desember 2009 berjumlah 3.863 dengan komposisi 2.665 laki-laki dan 1198 perempuan. Menurut UNGASS Country Report, Populasi di Indonesia yang hidup dengan HIV/AIDS pada akhir Tahun 2007 diestimasi sebesar 270.000 jiwa.

Setiap individu terinfeksi HIV dengan rata-rata durasi 8,6-19 tahun. Menurut Anonim (2010a), usia harapan hidup pada Tahun 2009 sekitar 71 tahun. Angka kematian anak-anak pada Tahun 2000-2005 sebesar 35 (per 1000) dan pada Tahun 2006-2010 sebesar 34 (per 1000). Rata-rata jumlah anak yang dilahirkan seorang perempuan dari kelompok dewasa (angka kelahiran total) pada Tahun 2009 sekitar 2,1. Angka maturasi anak-anak diasumsikan sama dengan angka maturasi dewasa, yaitu sekitar 15 tahun.

Tabel 4.1 menyajikan data jumlah penduduk Indonesia selama 8 tahun (2004-2011). Estimasi jumlah penduduk Indonesia (dalam ribuan) dikelompokkan dalam interval satu tahun disajikan dalam Tabel 5.1 dan grafik ditunjukkan dalam Gambar 5.1.

Tabel 5.1 Estimasi jumlah penduduk Indonesia (dalam ribuan)

Tahun	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010	2011
Jumlah Penduduk	217.072	218.869	222.192	225.642	228.523	231.369	234.181	237.556



Gambar 5.1 Data Penduduk Indonesia selama 8 tahun

Grafik tampak berbentuk logistik dengan persamaan diferensial

$$\frac{dN}{dt} = aN(K - N)$$

di mana  $N$  adalah jumlah penduduk Indonesia pada waktu  $t$ ,  $K$  adalah nilai akhir (*carrying capacity*) dan  $r$  adalah parameter kinetik (laju kenaikan intrinsik). Nilai  $K$  dan  $a$  ditentukan dengan aproksimasi persamaan diferensial, yaitu dengan persamaan diferensi

$$\frac{\Delta N}{\Delta t} = aN(K - N).$$

#### 5.4.1 Estimasi Nilai Parameter Model

Nilai dari parameter-parameter model dapat ditentukan menggunakan data Indonesia di atas dan menggunakan rumus-rumus yang telah digunakan oleh Lopez *et al.* (2007).

- (a) Laju kelahiran per kapita dari rata-rata *susceptible* dewasa ( $\beta_1$ )

Laju kelahiran per kapita dari rata-rata *susceptible* dewasa,

$$\begin{aligned}\beta_1 &= \frac{\text{total populasi perempuan susceptible} \times \text{total laju kelahiran}}{\text{total populasi perempuan}} \text{ (per tahun)} \\ &= \frac{(53.182.712)(2.17)}{53.187.920} = 2,16979.\end{aligned}$$

- (b) Laju kelahiran per kapita dari rata-rata *infected* dewasa ( $\beta_2$ )

Laju kelahiran per kapita dari rata-rata *infected* dewasa,

$$\begin{aligned}\beta_2 &= \frac{\text{total populasi perempuan infected} \times \text{total laju kelahiran}}{\text{total populasi perempuan}} \text{ (per tahun)} \\ &= \frac{(5208)(2,17)}{53.187.920} = 0,0002125.\end{aligned}$$

- (c) Laju kematian anak-anak per kapita ( $\mu$ )

Laju kematian anak-anak per kapita (JDR), adalah rata-rata laju kematian anak-anak dari dua tahun berbeda,

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{JDR(2000 - 2005) + JDR(2006 - 2010)}{2} \text{ (per tahun)} \\ &= \frac{(35/1000) + (34/1000)}{2} = 0,0345.\end{aligned}$$



(d) Laju kematian per kapita ( $\alpha$ )

Laju kematian per kapita didefinisikan sama dengan kebalikan dari rata-rata harapan hidup waktu lahir (ALE);

$$\alpha = \frac{1}{ALE} (\text{per tahun})$$

$$= \frac{1}{71} = 0,01409.$$

(e) Laju kematian karena HIV per kapita ( $\gamma$ )

Setiap individu terinfeksi dengan HIV, rata-rata durasi infeksi 8.6-19 tahun. Rata-rata sisa hidup dari individu *infected* dewasa sama dengan kebalikan periode infeksi rata-rata (MIP), diasumsikan MIP=15 tahun.

$$\gamma = \frac{1}{MIP} (\text{per tahun})$$

$$= \frac{1}{15} = 0,05882.$$

(f) Laju kontak ( $\nu$ )

Karena total populasi *susceptible* mendekati total populasi, maka laju kontak dihitung dengan rumus

$$\nu = \frac{\text{total infected baru dewasa (dalam 1 tahun)} \times \text{total populasi}}{\text{total populasi infected} \times \text{total populasi susceptible}}$$

$$\approx \frac{\text{total dewasa infected baru (dalam 1 tahun)}}{\text{total populasi infected}}$$

Dalam penelitian ini, total populasi *infected* diambil 270.000 jiwa sehingga

$$\nu = \frac{19.445}{270.000} = 0.07202.$$

(g) Laju maturasi,  $\eta_1$  dan  $\eta_2$ 

Laju maturasi anak-anak diasumsikan sama dengan laju maturasi dewasa diestimasi dengan

$$\eta_1 = \eta_2 = \frac{1}{19} = 0.0625 (\text{per tahun}).$$

(h) Parameter  $m$  yang mendeskripsikan kompetisi internal dihitung dengan rumus:

$$m = \frac{\beta_1 - \alpha}{K}$$

dengan  $K$  adalah *carrying capacity* Indonesia karena kepadatan penduduk yang disebabkan oleh kompetisi internal.

*Carrying capacity* karena kompetisi internal diestimasi menggunakan data Indonesia selama 8 tahun (2004-2009). Nilai  $K$  dan  $a$  dapat diturunkan dengan memeriksa nilai maksimum dari fungsi

$$y(N) = \frac{dN}{dt} = aN(K - N).$$

Dari  $\frac{dy}{dN} = 0$ , diperoleh  $a(K - 2N) = 0$  dan  $N_{maks} = \frac{K}{2}$ .

Tabel 5.2 menyajikan estimasi dari  $y(A_{maks})$  dari data dalam Tabel 5.1

Tabel 5.2 Estimasi  $y(A_{maks})$

$i$	$\Delta y_i = A_{i+1} - A_i$	Nilai maksimum $y$
1	1797	
2	3323	
3	3450	$y(A_{maks}) = y(\frac{K}{2})$
4	2881	
5	2846	
6	2812	
7	3375	

Untuk menentukan hubungan antar  $a$  dan  $K$ , digunakan rumus untuk  $y(A)$  dengan mengambil  $A = 223917$ , yaitu nilai rata-rata di mana nilai maksimum ditemukan, yaitu

$$a(223917)(K - 223917) = 3450 \Leftrightarrow a = \frac{0,0154}{K - 223917}.$$

Menggunakan rumus dari  $y$  untuk mendapatkan nilai  $K$  dengan rumus  $y(A_{maks}) = y(\frac{K}{2})$ , diperoleh

$$K^2 = \frac{4(3450)(K - 223917)}{0,0154}$$

$$K^2 - 896103,896 K + 200652896103,896 = 0$$

$$K_1 = 457930 \text{ dan } K_2 = 438170.$$

Jika nilai  $K$  diambil rata-rata dari  $K_1$  dan  $K_2$ , diperoleh  $K = 448050$ .

Jadi, estimasi *carrying capacity* karena kepadatan penduduk adalah  $K = 448.050.000$

$$\text{sehingga } m = \frac{\beta_1 - \alpha}{K} = \frac{2,16979 - 0,01409}{448.050.000} = 0,0000000048113.$$

Secara ringkas, nilai-nilai parameter model epidemik HIV/AIDS untuk Indonesia disajikan dalam Tabel 5.3 berikut.

Tabel 5.3 Estimasi Nilai Parameter Model

No	Parameter	Nilai (per tahun)
1.	$\beta_1$	2,16979
2.	$\beta_2$	0,0002125
3.	$\mu$	0,0345
4.	$\alpha$	0,01409
5.	$\gamma$	0,05882
6.	$\nu$	0,07202
7.	$\eta_1$	0,0625
8.	$\eta_2$	0,0625
9.	$m$	$4,8113 \times 10^{-9}$

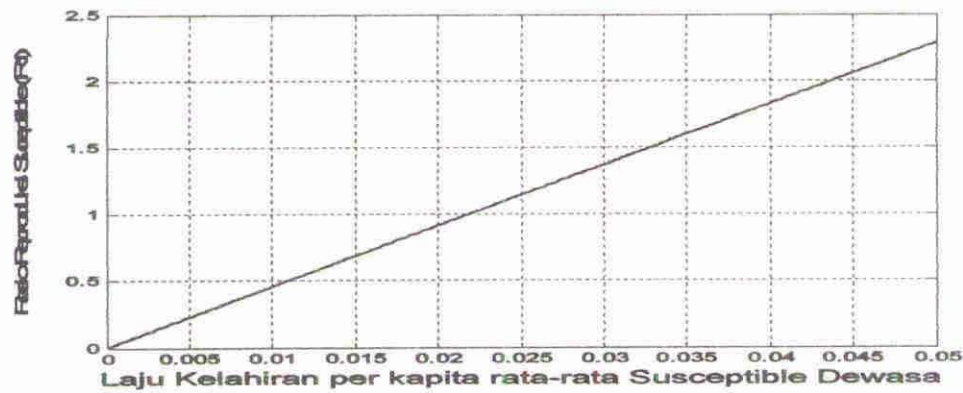
#### 5.4.2 Analisis Nilai Ambang Rasio Reproduksi

##### (a) Nilai Ambang Rasio Reproduksi *Susceptible*

Nilai ambang rasio reproduksi *susceptible* ( $R_1$ ) adalah rata-rata jumlah bayi *susceptible* yang dilahirkan oleh individu *susceptible* selama hidupnya. Menggunakan nilai-nilai parameter model dalam Tabel 5.2,  $R_1 = \left( \frac{\beta_1}{\alpha} \right) \left( \frac{\eta_1}{\eta_1 + \mu} \right) = 99,2236$ . Jadi, nilai rasio reproduksi *susceptible* lebih besar satu.

Gambar 5.2 merepresentasikan grafik dari pengaruh laju kelahiran per kapita dari rata-rata *susceptible* dewasa ( $\beta_1$ ) terhadap nilai ambang rasio reproduksi *susceptible* ( $R_1$ ).





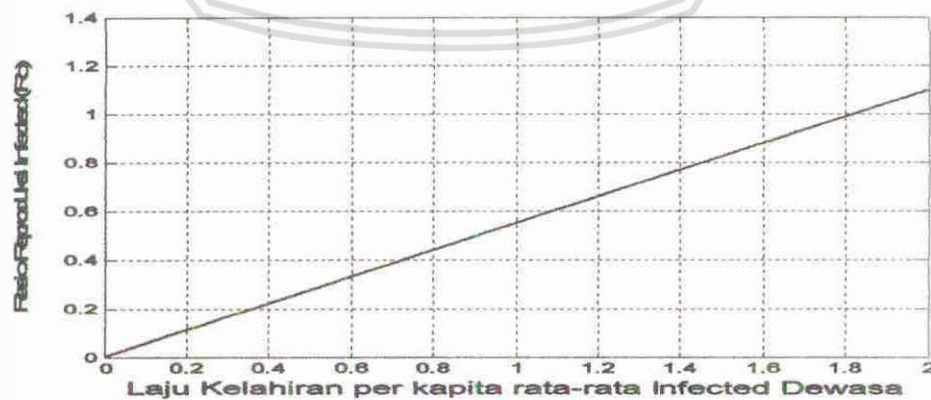
Gambar 5.2 Pengaruh laju kelahiran *susceptible* dewasa ( $\beta_1$ ) pada  $R_1$

Gambar 5.2 menunjukkan bahwa jika nilai laju kelahiran per kapita dari rata-rata *susceptible* dewasa meningkat, maka nilai rasio reproduksi *susceptible* juga meningkat. Nilai  $R_1 > 1$  jika nilai laju kelahiran per kapita dari rata-rata *susceptible* dewasa lebih besar dari 0,021.

(b) Nilai Ambang Rasio Reproduksi *Susceptible*

Nilai ambang rasio reproduksi *infected* ( $R_0$ ) adalah rata-rata jumlah *susceptible* baru yang dihasilkan oleh individu *susceptible*. Menggunakan nilai-nilai parameter model dalam Tabel 5.2,  $R_0 = \left( \frac{\xi\beta_2}{\alpha + \gamma} \right) \left( \frac{\eta_2}{\eta_2 + \mu + \gamma} \right) = 0,0001169$ . Jadi, nilai rasio reproduksi *susceptible* lebih kecil satu.

Gambar 5.3 merepresentasikan grafik dari pengaruh laju kelahiran per kapita dari rata-rata *infected* dewasa ( $\beta_2$ ) terhadap nilai ambang rasio reproduksi *infected* ( $R_0$ ).



Gambar 5.3 Plot dari  $\beta_2$  terhadap  $R_0$



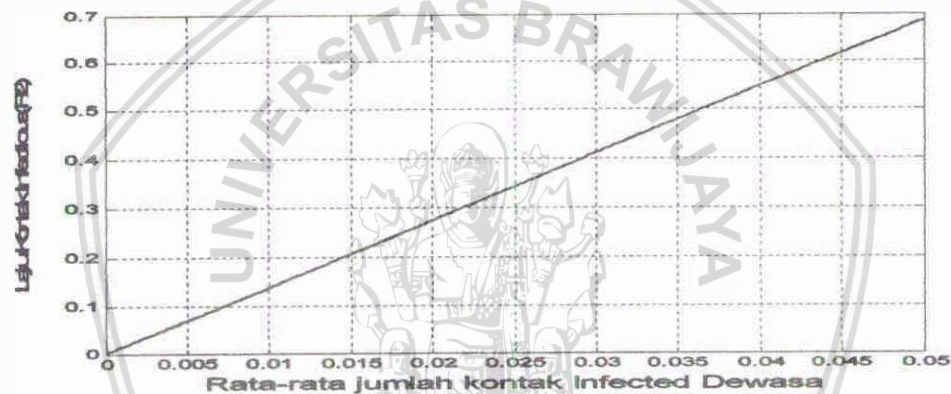
Gambar 5.3 menunjukkan bahwa jika nilai laju kelahiran per kapita dari rata-rata *infected* dewasa ( $\beta_2$ ) meningkat, maka nilai rasio reproduksi *infected* dewasa ( $R_0$ ) juga meningkat. Nilai  $R_0$  lebih kecil 1 jika nilai  $\beta_2 < 1,8$ .

(c) Nilai Ambang Laju Kontak *Infectious*

Nilai ambang laju kontak *infectious* ( $R_2$ ) adalah rata-rata jumlah kontak dari individu *infected* dewasa selama hidupnya. Menggunakan nilai-nilai parameter model dalam Tabel

5.2,  $R_2 = \frac{\nu}{\alpha + \gamma} = 0,9878$ . Jadi, nilai ambang laju kontak *infectious* lebih kecil satu.

Gambar 5.4 merepresentasikan grafik dari pengaruh laju kontak ( $\nu$ ) terhadap nilai ambang laju kontak *infectious* ( $R_2$ ).



Gambar 5.4 Plot dari  $\nu$  terhadap  $R_2$

Gambar 5.4 menunjukkan bahwa jika nilai rata-rata jumlah kontak *infected* dewasa ( $\nu$ ), maka nilai laju kontak *infectious* ( $R_2$ ) juga meningkat.

#### 5.4.2 Analisis Kestabilan Model

Menggunakan nilai-nilai parameter dalam Tabel 5.2,  $R_1 = 99,2236$ ,  $R_0 = 0,0001169$ , dan  $R_2 = 0,9878$ . Karena  $R_1 = 99,2236 > 1$ , maka model HIV/AIDS dengan pengaruh kelompok umur dan kepadatan penduduk hanya mempunyai titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_1^* = (55.029.000, 10.450.000, 0, 0)$ .

Menggunakan nilai-nilai parameter dalam Tabel 5.2, matriks Jacobi pada titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_1^* = (55.029.000, 10.450.000, 0, 0)$  adalah

$$J(E_0^*) = \begin{pmatrix} -0,6768 & 1,9050 & -0,2648 & -0,2646 \\ 0,0122 & -0,3794 & -0,0503 & -0,1223 \\ 0 & 0 & -0,4709 & 0,00002125 \\ 0 & 0 & 0,0625 & -0,3159 \end{pmatrix}.$$

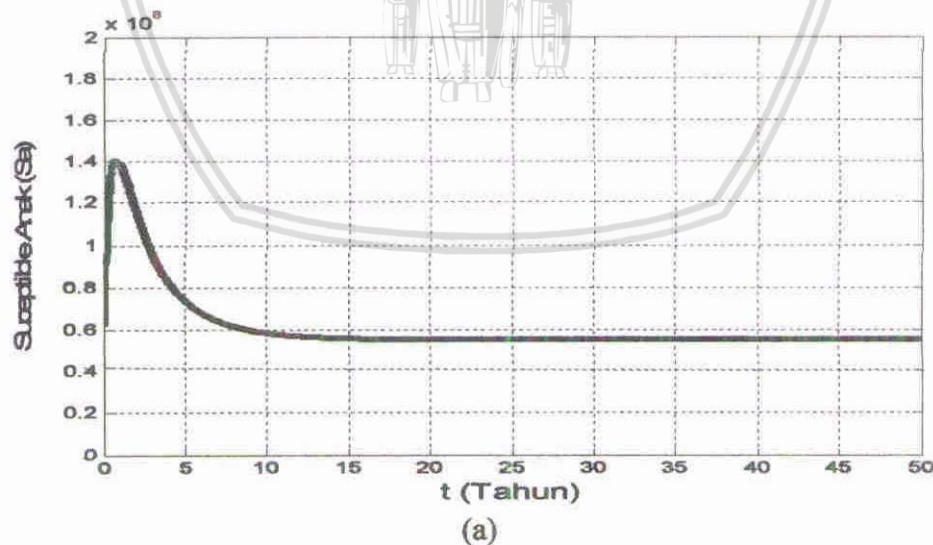
Menggunakan alat bantu program Matlab, semua nilai eigen dari matriks Jacobi  $J(E_1^*)$  adalah negatif, yaitu  $\lambda_1 = -0,7412$ ,  $\lambda_2 = -0,3150$ ,  $\lambda_3 = -0,4709$  dan  $\lambda_4 = -0,3159$ .

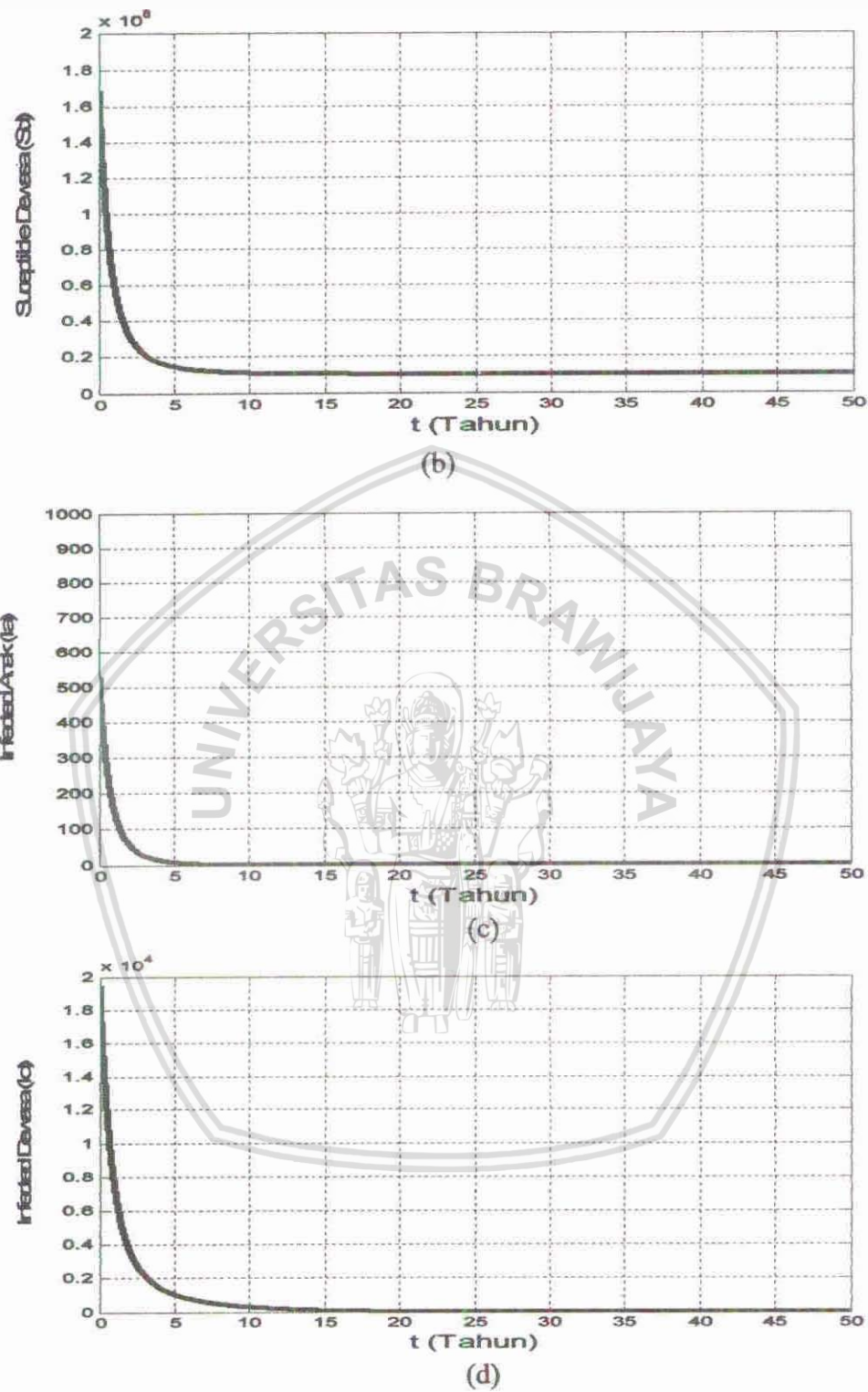
Jadi, titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_1^* = (55.029.000, 10.450.000, 0, 0)$  **stabil asimtotik lokal**.

Selanjutnya, karena  $R_2 + R_0 = 0,9879 < 1$  dan  $R_1 = 99,2236 > 2,4931 = \frac{\mu + \eta_2 + \gamma}{\eta_2}$ ,

maka titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_1^* = (55.029.000, 10.450.000, 0, 0)$  **stabil asimtotik global**. Ini berarti, pada akhirnya subpopulasi *infected* anak ( $I_a$ ) dan subpopulasi *infected* dewasa ( $I_d$ ) hilang (punah) dan subpopulasi *susceptible* anak ( $S_a$ ) dan subpopulasi *susceptible* dewasa ( $S_d$ ) mendekati nilai positif konstan.

Kestabilan global dari titik kesetimbangan bebas penyakit tersebut dapat dilihat pada grafik solusi numerik model epidemik HIV/AIDS menggunakan metode Runge- Kutta order empat berikut (Gambar 5.5 (a)-(d)).





Gambar 5.5 Kestabilan global titik kesetimbangan bebas penyakit dari model epidemik HIV-AIDS dengan pengaruh kelompok umur dan kepadatan penduduk (Sistem 5.1) untuk kasus HIV/AIDS di Indonesia:  $S_a(0) = 62376714$ ,  $S_d(0) = 168972405$ ,  $I_a(0) = 528$  dan  $I_d(0) = 19445$ .



Dari Gambar 5.5 (a)-(d) memperlihatkan perilaku kestabilan global dari masing-masing subpopulasi. Gambar 5.6 (a) menunjukkan bahwa subpopulasi *susceptible* anak ( $S_a$ ) cenderung bertambah pada satu tahun pertama kemudian turun terus hingga 16 tahun pertama dan 16 tahun tampak  $S_a$  konvergen menuju  $S_a^* = 55.029.000$ . Gambar 5.6 (b) menunjukkan bahwa sejak awal tahun hingga 17 tahun pertama subpopulasi *susceptible* dewasa ( $S_d$ ) berkurang terus jumlahnya dan setelah 17 tahun  $S_d$  konvergen menuju  $S_d^* = 10.450.000$ . Kecenderungan subpopulasi *infected* anak ( $I_a$ ) hampir sama seperti subpopulasi *susceptible* dewasa. Dari awal tahun hingga 6 tahun pertama tampak jumlahnya turun terus ( Gambar 4.5 (c)) dan setelah 6 tahun,  $I_a$  konvergen menuju  $I_a^* = 0$ . Demikian juga untuk subpopulasi *infected* dewasa ( $I_d$ ), Gambar 5.5 (d) menunjukkan bahwa sejak awal tahun hingga 18 tahun cenderung turun terus jumlahnya dan setelah 18 tahun,  $I_d$  konvergen menuju  $I_d^* = 0$ . Jadi, setelah 18 tahun jika parameter tidak berubah maka tidak ada individu yang terinfeksi dan subpopulasi *susceptible* anak dan dewasa menuju nilai yang konstan.



## BAB VI

### KESIMPULAN DAN SARAN

#### 6.1 Kesimpulan

Untuk penyakit tanpa *recovery*, kestabilan model epidemik HIV/AIDS dengan kelompok umur dan kepadatan penduduk adalah sebagai berikut:

1. Terdapat satu titik kesetimbangan bebas penyakit yang fisibel jika rasio reproduksi *susceptible* lebih besar satu ( $R_1 > 1$ ). Titik kesetimbangan bebas penyakit akan stabil asimtotik lokal jika rasio reproduksi *infected* kurang dari satu dan jumlah laju kontak infeksi dan  $d$  o reproduksi *infected* kurang dari satu ( $R_0 < 1$  dan  $R_0 + R_2 \leq 1$ ) dan jika rasio reproduksi *susceptible* lebih besar dari invers perkalian peluang hidup dari masa anak-anak *susceptible* dan peluang mati selama masa dewasa *susceptible* ( $R_1 > \frac{(\eta_1 + \mu)(\nu + \alpha)}{\eta_1 \alpha}$ ), maka titik kesetimbangan bebas penyakit stabil asimtotik global.
2. Jika rasio reproduksi *infected* lebih besar dari satu dan bayi yang lahir dari perempuan hamil terinfeksi adalah infeksi ( $R_0 > 1$  dan  $\xi = 1$ ), maka terdapat satu titik kesetimbangan kepunahan *susceptible*. Titik kesetimbangan kepunahan *susceptible* akan stabil asimtotik lokal jika rasio reproduksi *susceptible* kurang dari atau sama dengan satu ( $R_1 \leq 1$ ) dan jika rasio reproduksi *infected* ( $R_0$ ) lebih besar dari  $\frac{\mu + \eta_2 + \gamma}{\eta_2}$ , maka titik kesetimbangan kepunahan *susceptible* stabil asimtotik global.
3. Untuk kasus data HIV/AIDS di Indonesia dengan data awal tahun 2009, nilai-nilai ambang rasio reproduksi *susceptible*  $R_1 = 99.2236$ , rasio reproduksi *infected*  $R_0 = 0.0001169$  dan laju kontak infeksi  $R_2 = 0.9878$ . Model epidemik HIV/AIDS dengan dua kelompok umur dan kepadatan penduduk mempunyai satu titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_1^* = (55.029.000, 10.450.000, 0, 0)$  yang stabil asimtotik global setelah kira-kira 18 tahun.

## DAFTAR PUSTAKA

- Anderson, R.M., (2001) *The Role of Mathematical Models in The Study of HIV Transmission and The Epidemiology of AIDS*, *J. AIDS* 1:214-256.
- Anonim (2007). *Profil Kesehatan Indonesia*, Departemen Kesehatan RI. <http://www.depkes.go.id/> Tanggal Akses 12 Agustus 2011.
- Anonim, (2010a) *Profil Kesehatan Indonesia*. Depkes RI. <http://www.depkes.go.id/> Tanggal Akses 12 Agustus 2011.
- Anonim, (2010b) *Republic of Indonesia Country Report of the Follow up to The Declaration of Commitment on HIV/AIDS: Reporting Period 2008-2009*, National AIDS Commission Republic of Indonesia. Anonim, (2010c) *United Nations General Assembly Special Session (UNGASS) Country Report*. Depkes RI.
- Brauer, F. and Castillo-Chavez, C. (2001). *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*, Text in Applied Mathematics Vol. 40, Springer Verlag.
- De Leon, C. V. (2009) *Constructions of Lyapunov Functions for Classics SIS, SIR, and SIRS Epidemic Model with Variable Population Size*,
- Hugo, O. (2001) *Mobilitas Penduduk dan HIV/AIDS di Indonesia*, UNAIDS, Indonesia.
- Lopez, R., Kuang, Y. dan Tridane, A. (2007). *A Simple SI with Two age groups and Its Application to US HIV epidemics: To Treat or Not to Treat*, *Journal of Biological Systems*, Vol, 15 No 2.
- Kermack, W.O and McKendrick, A.G. (1927) *A Contribution to the Mathematical of Epidemics*, *Proceedings of the Royal Society of London*, Vol. 115. Pp. 700-721
- Marsudi dan Trisilowati (2004) *Model Penyebaran Epidemik dan Penyebaran Spatial (Geografi) Epidemik Demam Berdarah*, *Jurnal Ilmu-Ilmu Hayati (Live Science)*, Vol. 16 Nomor 1, Lemlit Unibraw Malang.

Marsudi dan Handamari, E. W. (2006) *Model Deterministik dari Dinamika Epidemik Penyakit Infeksius menggunakan Persamaan Diferensial, Laporan Penelitian, P3M FMIPA Unibraw Malang.*

Murray, J. D. (1993) *Mathematical Biology*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York.

Rao, A.S.R.S.. (1993) *Mathematical modeling of AIDS Epidemic in India*, Current Science, Vol. 84 No. 9.







## LAMPIRAN



## LAMPIRAN 1

### **Personalia Tenaga Peneliti Beserta Kualifikasinya**



### Personalia Tenaga Peneliti Beserta Kualifikasinya

No	Nama Ketua, Anggota dan Gelar	Bidang Keahlian/Instansi	Kualifikasi dan Tugas
1.	Drs. Marsudi, MS.	Matematika Terapan Jurusan Matematika FMIPA Universitas Brawijaya	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Penanggung jawab Penelitian</li> <li>- Menentukan model epidemik HIV/AIDS tipe <i>SI</i></li> <li>- Menentukan titik kesetimbangan dan melakukan analisis kestabilan titik kesetimbangan (lokal dan global) secara analitik</li> <li>- Melakukan simulasi numerik model dan memverifikasi hasil analitik</li> </ul>
2.	Dra. Trisilowati, MSc.	Matematika Terapan Jurusan Matematika FMIPA Universitas Brawijaya	<ul style="list-style-type: none"> <li>- Estimasi parameter-parameter model</li> <li>- Menghitung nilai-nilai ambang berkaitan dengan parameter-parameter (epidemiologi dan demografi)</li> <li>- Melakukan interpretasi hasil numerik</li> </ul>



## LAMPIRAN 2

### Makalah Seminar Nasional Matematika 2011 di UNPAR



# ANALISIS KESTABILAN EPIDEMIK HIV/AIDS DENGAN KELOMPOK UMUR DAN KOMPETISI INTERNAL\*

Marsudi<sup>1</sup> dan Kwardinia A.<sup>2</sup>

<sup>1</sup>KBI Matematika Terapan, Jurusan Matematika Universitas Brawijaya Malang  
e-mail: marsudi61@ub.ac.id

<sup>2</sup>KBI Matematika Terapan, Jurusan Matematika Universitas Brawijaya Malang

**Abstrak.** Artikel ini bertujuan untuk menganalisis kestabilan epidemik HIV/AIDS dengan kelompok umur dan kompetisi internal melalui model kompartemen *SI* (*susceptible-infected*). Dalam model *SI* ini, populasi dibagi menjadi dua subpopulasi (anak-anak dan dewasa). Subpopulasi dimodelkan melalui kontak seksual tanpa *recovery*. Diasumsikan parameter-parameter model (parameter epidemiologi dan demografi) dan hanya individu dewasa yang dapat melahirkan. Kestabilan (lokal/global) titik kesetimbangan model (bebas penyakit dan kepunahan *susceptible*) dianalisis secara teoritik menggunakan kombinasi analisis persamaan karakteristik dari matriks Jacobi dan Prinsip Invariansi Lyapunov-LaSalle. Simulasi numerik diberikan menggunakan data kasus di Indonesia tahun 2007.

**Kata Kunci :** *epidemik HIV/AIDS, model SI, kestabilan lokal dan global.*

## 1. Pendahuluan

Di awal abad 20, model matematika diperkenalkan ke dalam epidemiologi oleh [1]. Model matematika telah banyak terbukti dalam membantu pemahaman fenomena penyebaran penyakit infeksius. Misalnya, [2] menggunakan model SIR untuk model epidemik penyakit infeksius.

Pada awalnya, model matematika untuk epidemik HIV hanya bersifat spekulatif dengan memasukkan aspek-aspek biologi dan perilaku dalam model, misalnya [4] dan [6]. Saat ini banyak penelitian tentang analisis matematika dari model dinamika yang disebarkan melalui kontak seksual dan dikombinasikan dengan data sehingga menjadi populer ([3]). Model matematika telah dikembangkan dan digunakan untuk penyakit yang ditularkan melalui hubungan seksual oleh [7]. Penyakit yang disebarkan melalui kontak seksual (*sexually transmitted diseases*=STD) adalah penularan yang ditransfer dari satu orang ke satu orang lain melalui kontak seksual di dalam populasi. [5] dan [6] menggunakan model matematika untuk STD yang berkaitan dengan dinamika HIV dengan struktur usia yang diterapkan di Amerika Serikat. Dalam hal ini, subpopulasi dimodelkan melalui proses epidemik *SI* yang sesuai untuk STD tanpa *recovery*. Sebagian besar dari kajian para peneliti di atas menganalisis dinamika epidemik model, khususnya menentukan titik-titik kesetimbangan dan menganalisis kestabilannya. Titik kesetimbangan trivial (bebas penyakit) diperoleh jika dalam populasi tidak ada yang terinfeksi. Sebaliknya, titik kesetimbangan nontrivial (endemik) diperoleh jika dalam populasi terdapat individu yang terinfeksi. Kemudian masing-masing titik kesetimbangan dianalisis kestabilannya. Dalam teori epidemik klasik, biasanya ditemukan angka reproduksi  $R_0$ , yaitu nilai harapan dari infeksi kedua yang dihasilkan oleh individu terinfeksi pertama. Jika  $R_0 \geq 1$ , diperkirakan terjadi epidemik dan jika  $R_0 < 1$ , penyakit akan hilang dari populasi.

---

<sup>\*)</sup> Makalah dipresentasikan dalam Seminar Nasional Matematika 2011 di Unpar, 1 Oktober 2011



Model yang digunakan dalam makalah ini merujuk pada model yang diperkenalkan oleh [5] dan [6]. Jika jumlah populasi terus meningkat dan sementara keadaan demografi atau lingkungannya mempunyai jumlah sumber yang terbatas, maka akan terjadi kepadatan (kompetisi internal) dan mempengaruhi keberlangsungan hidup bahkan dapat menyebabkan kematian individu dalam populasi tersebut. Kompetisi internal terjadi jika individu dari populasi yang sama berpengaruh negatif terhadap kebugaran individu yang lain karena mereduksi ketersediaan sumber yang terbatas. Pada tingkat individu, kompetisi terhadap sumber dapat mempengaruhi perkembangan, kelahiran, dan kelangsungan hidup. Pada tingkat populasi, kompetisi internal terhadap sumber dapat menimbulkan pertumbuhan populasi logistik.

## 2. Model Matematika

Model epidemik HIV/AIDS dideskripsikan menggunakan model kompartemen, di mana secara demografi populasi dibagi menjadi dua subpopulasi, yaitu kelompok anak-anak berusia 0-14 tahun dan kelompok dewasa berusia 15 tahun ke atas. Secara epidemiologi, masing-masing subpopulasi terdiri dari dua kelompok, yaitu *Susceptibles anak* dan *dewasa* ( $S_a$  dan  $S_d$ ) dan *Infected anak* dan *dewasa* ( $I_a$  dan  $I_d$ ). Transisi antara kedua subpopulasi dapat disajikan ke dalam model matematika berbentuk sistem persamaan diferensial nonlinear ([5] dan [6]) sebagai berikut:

$$\begin{aligned}\frac{dS_a}{dt} &= \beta_1 S_d + (1-\xi)\beta_2 I_d - \eta_1 S_a - \mu S_a - m S_a N \\ \frac{dS_d}{dt} &= \eta_1 S_a - \frac{\nu S_d I_d}{S_d + I_d} - \alpha S_d - m S_d N \\ \frac{dI_a}{dt} &= \xi\beta_2 I_d - \eta_2 I_a - \mu I_a - \gamma I_a - m I_a N \\ \frac{dI_d}{dt} &= \eta_2 I_a + \frac{\nu S_d I_d}{S_d + I_d} - \alpha I_d - \gamma I_d - m I_d N\end{aligned}\quad (1)$$

dengan  $N = S_a + I_a + S_d + I_d$  adalah populasi total,  $\beta_1$  ( $\beta_2$ ) adalah laju kelahiran per kapita subpopulasi anak-anak (dewasa),  $\eta_1$  ( $\eta_2$ ) adalah laju maturasi per kapita subpopulasi anak-anak (dewasa),  $\mu$  adalah laju kematian alami subpopulasi anak-anak (dewasa),  $\alpha$  adalah laju kematian per kapita dari individu dewasa,  $\gamma$  adalah laju kematian per kapita dari penyakit,  $\nu$  adalah peluang kontak antara individu *susceptible* dewasa dengan *infected* dewasa,  $m$  adalah parameter kompetisi internal dan  $\xi$  ( $0 \leq \xi \leq 1$ ) adalah bagian yang lahir sehat dari ibu terinfeksi.

Selanjutnya diasumsikan tidak ada migrasi (emigrasi atau imigrasi), diinterpretasikan kedewasaan sebagai emigrasi dari tingkat anak-anak dan imigrasi ke dalam tingkat dewasa, individu tidak kebal, hanya individu dewasa yang dapat melahirkan, angka kematian kedua subpopulasi identik terhadap angka kematian ( $\mu_1 = \mu_2 = \mu$ ) dan tidak ada infeksi karena kontak seksual dalam subpopulasi anak-anak.

## 3. Eksistensi, Ketunggalan dan Keterbatasan Solusi

Misalkan  $R_+^4 = (0, \infty)$  adalah himpunan vektor-vektor positif  $X = (S_a, S_d, I_a, I_d)$  dengan

$S_a > 0, S_d > 0, I_a > 0, I_d > 0$ . Misalkan  $F: R_+^4 \rightarrow R^4$ ,  $F(X) = (F_1(X), F_2(X), F_3(X), F_4(X))$

adalah fungsi kontinu di mana  $F_i(X)$  adalah fungsi (persamaan ke- $i$ ) pada ruas kanan sistem (1) yang mempunyai derivatif-derivatif parsial terhadap  $S_a, S_d, I_a$  dan  $I_d$  dan kontinu di  $R_+^4$ . Maka dapat diperlihatkan bahwa  $F$  adalah kontinu Lipschitz lokal di  $R_+^4$ . Dengan demikian, ada jaminan



eksistensi dan ketunggalan solusi  $(S_a, S_d, I_a, I_d)$  untuk sistem (1) jika memenuhi kondisi awal  $S_a = S_a^0, S_d = S_d^0, I_a = I_a^0, I_d = I_d^0$  dan  $S_a^0 \geq 0, S_d^0 \geq 0, I_a^0 \geq 0$  dan  $I_d^0 \geq 0$ .

Karena dalam setiap kelompok subpopulasi ada kompetisi internal, maka semua solusi dari sistem (1) adalah terbatas. Dibuktikan sebagai berikut.

Misalkan  $X = (S_a(t), S_d(t), I_a(t), I_d(t))$  adalah solusi dari sistem (1) dengan

$N(t) = S_a(t) + S_d(t) + I_a(t) + I_d(t)$  dan  $\beta = \max\{\beta_1, \beta_2\}$ . Maka

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dt} &= \frac{dS_a}{dt} + \frac{dS_d}{dt} + \frac{dI_a}{dt} + \frac{dI_d}{dt} \\ &= -\mu S_a + (\beta_1 - \alpha) S_d - (\mu + \gamma) I_a + (\beta_2 - \alpha - \gamma) I_d - mN^2 \\ &\leq \beta(S_d + I_d) - mN^2 \leq \beta N - mN^2 = N(\beta - mN).\end{aligned}$$

Akan ditunjukkan  $N(t) \leq M$  untuk  $t \geq 0$  dan  $M = \max\{N(0), \frac{\beta}{m} + 1\}$ .

- Misalkan  $M = \frac{\beta}{m} + 1$  dan andaikan terdapat  $t_1 > 0$  sedemikian sehingga

$$N(t_1) = \frac{\beta}{m} + 1, N(t) < \frac{\beta}{m} + 1 \quad (t < t_1) \quad \text{dan} \quad \frac{dN(t_1)}{dt} \geq 0. \quad (*)$$

$$\text{Maka } \frac{dN(t_1)}{dt} \leq \beta N(t_1) - mN^2(t_1) = \beta\left(\frac{\beta}{m} + 1\right) - m\left(\frac{\beta}{m} + 1\right)^2 = [\beta - m\left(\frac{\beta}{m} + 1\right)]\left(\frac{\beta}{m} + 1\right) = -m\left(\frac{\beta}{m} + 1\right).$$

Ini berarti,  $\frac{dN(t_1)}{dt} < 0$ . Kontradiksi dengan (\*).

- Misalkan  $M = N(0)$  dan andaikan terdapat  $t_1 > 0$  sedemikian sehingga

$$N(t_1) = M \quad \text{dan} \quad \frac{dN(t_1)}{dt} \geq 0. \quad (**)$$

$$\text{Maka } \frac{dN(t_1)}{dt} \leq \beta N(t_1) - mN^2(t_1) = \beta M - mM^2 = M(\beta - mM).$$

Karena  $\frac{\beta}{m} < \frac{\beta}{m} + 1 \leq M$ , maka  $\beta - mM < 0$  dan  $\frac{dN(t_1)}{dt} < 0$ . Kontradiksi dengan (\*\*).

Ini berarti, tidak benar terdapat  $t_1 > 0$  sedemikian sehingga memenuhi (\*) atau (\*\*).

Jadi, terbukti  $N(t) \leq M$  untuk  $t \geq 0$ .

#### 4. Analisis Kestabilan

Titik kesetimbangan model dinamika epidemik HIV/AIDS dengan pengaruh kelompok umur dan kompetisi internal diperoleh dari sistem (1) dengan menyamakan ruas kanan sama dengan nol, diperoleh kondisi kesetimbangan

$$\begin{aligned}\beta_1 S_d + (1 - \xi) \beta_2 I_d - \eta_1 S_a - \mu S_a - m S_a N &= 0 \\ \eta_1 S_a - \frac{\nu \beta_1 I_d}{S_a + I_d} - \alpha S_d - m S_d N &= 0 \\ \xi \beta_2 I_d - \eta_2 I_a - \mu I_a - \gamma I_a - m I_a N &= 0 \\ \eta_2 I_a + \frac{\nu \beta_2 I_d}{S_d + I_d} - \alpha I_d - \gamma I_d - m I_d N &= 0\end{aligned} \quad (2)$$

##### 4.1 Kestimbangan dan kestabilan titik kesetimbangan bebas penyakit

Titik kesetimbangan bebas penyakit dari model  $E_0^* = (S_a^*, S_d^*, 0, 0)$  terjadi jika tidak ada individu yang terinfeksi dalam subpopulasi anak-anak ( $I_a^* = 0$ ) dan subpopulasi dewasa ( $I_d^* = 0$ ). Dari kondisi kesetimbangan (2), diperoleh kondisi kesetimbangan

$$\begin{aligned} -(\eta_1 + \mu)S_a^* + \beta_1 S_d^* - mS_a^*(S_a^* + S_d^*) &= 0 \\ \eta_1 S_a^* - \alpha S_d^* - mS_d^*(S_a^* + S_d^*) &= 0 \end{aligned} \quad (3)$$

dan penyelesaian sistem (3) adalah

$$S_a^* = \frac{\alpha S_d^* + m(S_d^*)^2}{\eta_1 - mS_d^*} \quad \text{dan} \quad S_d^* = \frac{(\eta_1 + \mu)S_a^* + m(S_a^*)^2}{\beta_1 - mS_a^*}$$

dengan  $S_a^* < \frac{\beta_1}{m}$  dan  $S_d^* < \frac{\eta_1}{m}$ . Karena  $N_1^* = S_a^* + S_d^*$ , maka bentuk matriks kondisi kesetimbangan (3) menjadi

$$\begin{bmatrix} -(\eta_1 + \mu + mN_1^*) & \beta_1 \\ \eta_1 & -(\alpha + mN_1^*) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} S_a^* \\ S_d^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

Sistem (4) mempunyai solusi positif  $(S_a^*, S_d^*)$  jika determinan matriks dalam sistem (4) adalah nol, yaitu

$$\begin{aligned} m^2 N_1^{*2} + m(\eta_1 + \mu + \alpha)N_1^* + [\alpha(\eta_1 + \mu) - \beta_1 \eta_1] &= 0 \\ \Leftrightarrow mN_1^{*2} + (\eta_1 + \mu + \alpha)N_1^* + \frac{1}{m}[\alpha(\eta_1 + \mu) - \beta_1 \eta_1] &= 0 \\ N_1^* = \frac{-(\eta_1 + \mu + \alpha) + \sqrt{(\eta_1 + \mu + \alpha)^2 - 4[\alpha(\eta_1 + \mu) - \beta_1 \eta_1]}}{2m} \end{aligned}$$

dengan syarat  $\alpha(\eta_1 + \mu) - \beta_1 \eta_1 < 0$ . Jika didefinisikan  $R_1 = \left( \frac{\beta_1}{\alpha} \right) \left( \frac{\eta_1}{\eta_1 + \mu} \right)$  adalah rata-rata jumlah *susceptible* baru yang dihasilkan oleh seorang anak *susceptible* selama kedewasaannya kali peluang hidup *susceptible* masa anak-anak (rasio reproduksi *susceptible*), maka

$$N_1^* = \frac{-(\eta_1 + \mu + \alpha) + \sqrt{(\eta_1 + \mu + \alpha)^2 - 4[\alpha(\eta_1 + \mu)(1 - R_1)]}}{2m}$$

dengan  $R_1 > 1$ . Dengan mensubstitusikan nilai  $N_1^*$  ke dalam sistem (3) diperoleh

$$S_a^* = \frac{(\alpha + mN_1^*)N_1^*}{\alpha + \eta_1 + mN_1^*} \quad \text{dan} \quad S_d^* = \frac{\eta_1 N_1^*}{\alpha + \eta_1 + mN_1^*}. \quad (5)$$

Jadi, sistem (1) mempunyai titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_0^* = (S_a^*, S_d^*, 0, 0)$  dengan  $S_a^*$  dan  $S_d^*$  ditunjukkan dalam persamaan (5) jika  $R_1 > 1$ .

Selanjutnya, analisis kestabilan dari titik kesetimbangan  $E_0^*$  ditunjukkan sebagai berikut.

Matriks Jacobi dari model (1) pada titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_0^* = (S_a^*, S_d^*, 0, 0)$

$$J(E_0^*) = \begin{pmatrix} -[\eta_1 + \mu + m(S_a^* + N_1^*)] & \beta_1 - mS_d^* & -mS_d^* & (1-\xi)\beta_2 - mS_d^* \\ \eta_1 - mS_d^* & -[\alpha + m(S_d^* + N_1^*)] & -mS_d^* & -(\nu + mS_d^*) \\ 0 & 0 & -(\eta_2 + \mu + \gamma + mN_1^*) & \xi\beta_2 \\ 0 & 0 & \eta_2 & \nu - (\alpha + \gamma + mN_1^*) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} B_1 & B_3 \\ 0 & B_2 \end{pmatrix}.$$

Maka  $\text{trace}(E_0^*) = \text{trace}(B_1) + \text{trace}(B_2)$

$$= -[\eta_1 + \mu + \alpha + 2m(S_a^* + N_1^*)] - [\eta_2 + \mu + \gamma + 2mN_1^* + (\alpha + \gamma - \nu)].$$



dan  $\det(E_0^*) = \det(B_1) \det(B_2)$

$$\begin{aligned} &= \{ -[\eta_1 + \mu + m(S_a^* + N_1^*)][\alpha + m(S_d^* + N_1^*)] - (\eta_1 - mS_d^*)(\beta_1 - mS_a^*) \} \{ -(\eta_2 + \mu + \gamma \\ &\quad + mN_1^*)[\nu - (\alpha + \gamma + mN_1^*)] - \xi\beta_2\eta_2 \} \\ &= \{ mN_1^*(\eta_1 + \mu + \alpha + mN_1^*) \} \{ (\eta_2 + \mu + \gamma)(\alpha + \gamma)[1 - (R_0 + R_2)] + (mN_1^*)^2 \\ &\quad + mN_1^*[(\alpha + \gamma - \nu) + (\eta_2 + \mu + \alpha)] \}. \end{aligned}$$

Karena semua parameter diasumsikan positif, maka  $\text{trace}(J(E_0^*)) < 0$  dan  $\det(J(E_0^*)) > 0$

jika diasumsikan  $\alpha + \gamma > \nu$  dan  $R_0 + R_2 \leq 1$  di mana  $R_2 = \frac{\nu}{\alpha + \gamma}$  yaitu laju kontak *infectious*.

Ini berarti, matriks Jacobi  $J(E_0^*)$  mempunyai nilai-nilai eigen negatif. Jadi, titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_0^*$  adalah stabil asimtotik lokal.

Didefinisikan fungsi Lyapunov  $V : \Omega = \{(S_a, S_d, I_a, I_d) \in \mathbb{R}_+^4 \mid S_a, S_d > 0\} \rightarrow \mathbb{R}$  dengan

$$V(X) = \omega_2 I_a + I_d, \quad X = (S_a, S_d, I_a, I_d) \in \mathbb{R}_+^4, \quad \omega_2 = \frac{\eta_2}{\eta_2 + \mu + \gamma}$$

Maka turunan dari  $V(X)$  sepanjang solusi untuk sistem (1) adalah

$$\begin{aligned} \frac{dV(X)}{dt} &= \omega_2 (\xi\beta_2 I_d - \eta_2 I_a - \mu I_a - \gamma I_a - mI_a N) + (\eta_2 I_a - \frac{\nu S_d I_d}{S_d + I_d} - \alpha I_d - \gamma I_d - mI_d N) \\ &= (\eta_2 + \mu + \gamma) \left( \frac{\eta_2}{\eta_2 + \mu + \gamma} - \omega_2 \right) I_a + (\omega_2 \xi\beta_2 - (\alpha + \gamma) I_d + \frac{\nu S_d I_d}{S_d + I_d} - mVN) \\ &\leq (\alpha + \gamma - \nu) \left( \frac{\xi\beta_2 \eta_2}{(\eta_2 + \mu + \gamma)(\alpha + \gamma - \nu)} - 1 \right) I_d - mVN. \end{aligned}$$

Karena  $R_0 + R_2 \leq 1$ , maka  $\frac{\xi\beta_2 \eta_2}{(\eta_2 + \mu + \gamma)(\alpha + \gamma - \nu)} < 1$  sehingga  $\frac{dV(X)}{dt} \leq 0$  untuk  $X \in \mathbb{R}_+^4$ .

Selanjutnya,  $\frac{dV(X)}{dt} = 0$  hanya jika  $I_a = I_d = 0$ . Himpunan invarian maksimum dalam  $\{X \in \mathbb{R}_+^4 \mid \frac{dV(X)}{dt} = 0\}$  adalah singleton  $\{E_0^*\} = \{(S_a, S_d, 0, 0)\}$ . Menggunakan Prinsip Invariansi Lyapunov-LaSalle, titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_0^* = (S_a^*, S_d^*, 0, 0)$  adalah stabil global.

#### 4.2 Kesetimbangan dan kestabilan titik kesetimbangan kepunahan susceptible

Titik kesetimbangan kepunahan *susceptible* (*susceptible extinction*)  $E_1^* = (0, 0, I_a^*, I_d^*)$  dari sistem (1) terjadi jika tidak ada individu sehat dalam subpopulasi anak-anak ( $S_a^* = 0$ ) dan tidak ada individu sehat dalam subpopulasi dewasa ( $S_d^* = 0$ ). Dari kondisi kesetimbangan (2) dan menyelesaikannya, diperoleh

$$\begin{aligned} (1 - \xi)\beta_2 I_d^* &= 0 \\ -(\eta_2 + \mu + \gamma)I_a^* + \beta_2 I_d^* - mI_a^*(I_a^* + I_d^*) &= 0 \\ \eta_2 I_a^* - (\alpha + \gamma)I_d^* - mI_d^*(I_a^* + I_d^*) &= 0. \end{aligned} \tag{6}$$

(i) Kasus  $\xi = 1$ . Jika semua anak yang lahir dari ibu terinfeksi adalah terinfeksi, maka terdapat titik kesetimbangan kepunahan *susceptible*  $E_1^* = (0, 0, I_a^*, I_d^*)$ . Dari persamaan kedua dan ketiga sistem (6) diperoleh



dengan  $I_a^* < \frac{\beta_2}{m}$  dan  $I_a^* < \frac{m}{\eta_2}$ . Karena  $N_2^* = I_a^* + I_d^*$ , maka bentuk matriks persamaan kedua dan ketiga sistem (6) adalah

$$\begin{bmatrix} -(\eta_2 + \mu + \gamma + mN_2^*) & \beta_2 \\ \eta_2 & -(\alpha + \gamma + mN_2^*) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_a^* \\ I_d^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (7)$$

dan mempunyai solusi positif  $(I_a^*, I_d^*)$  jika determinan matriks dalam sistem (7) adalah nol, yaitu

$$\begin{aligned} m^2 N_2^{*2} + m(\eta_2 + \mu + \alpha + 2\gamma)N_2^* + [(\alpha + \gamma)(\eta_2 + \mu + \gamma) - \beta_2 \eta_2] &= 0 \\ \Leftrightarrow mN_2^{*2} + (\eta_2 + \mu + \alpha + 2\gamma)N_2^* + \frac{m}{\eta_2}[(\alpha + \gamma)(\eta_2 + \mu + \gamma) - \beta_2 \eta_2] &= 0 \end{aligned}$$

$$N_2^* = \frac{-\left(\eta_2 + \mu + \alpha + 2\gamma\right) + \sqrt{\left(\eta_2 + \mu + \alpha + 2\gamma\right)^2 - 4\left[(\alpha + \gamma)(\eta_2 + \mu + \gamma) - \beta_2 \eta_2\right]}}{2m}$$

dengan syarat  $(\alpha + \gamma)(\eta_2 + \mu + \gamma) - \beta_2 \eta_2 < 0$ . Jika didefinisikan  $R_0 = \left(\frac{\beta_2}{\eta_2}\right) \left(\frac{\alpha + \gamma}{\eta_2 + \mu + \gamma}\right)$  adalah rasio reproduksi subpopulasi *infected*, maka

$$N_2^* = \frac{-(\eta_2 + \mu + \alpha + 2\gamma) + \sqrt{(\eta_2 + \mu + \alpha + 2\gamma)^2 - 4[(\alpha + \gamma)(\eta_2 + \mu + \gamma)(1 - R_0)]}}{2m}$$

dengan  $R_0 > 1$ . Dengan mensubstitusikan nilai  $N_2^*$  ke dalam persamaan dalam sistem (6) diperoleh

$$I_a^* = \frac{(\alpha + \gamma + mN_2^*)N_2^*}{\alpha + \eta_2 + \gamma + mN_2^*} \text{ dan } I_d^* = \frac{\alpha + \eta_2 + \gamma + mN_2^*}{\eta_2 N_2^*} \quad (8)$$

Jadi, sistem (1) mempunyai titik kesetimbangan *susceptible*  $E_1^* = (0, 0, I_a^*, I_d^*)$

dengan  $I_a^*$  dan  $I_d^*$  ditunjukkan dalam persamaan (8) jika  $R_0 > 1$  dan  $\xi = 1$ .

(ii) Kasus  $0 \leq \xi < 1$ . Jika anak yang lahir dari ibu terinfeksi adalah sehat, maka tidak

terdapat titik kesetimbangan *susceptible*  $E_1^*$  sebab dari sistem (7),  $I_a^* = I_d^* = 0$ .

Selanjutnya, analisis kestabilan dari titik kesetimbangan  $E_1^*$  ditunjukkan sebagai berikut.

Matriks Jacobi dari model (1) pada titik kesetimbangan  $E_1^* = (0, 0, I_a^*, I_d^*)$  untuk kasus  $\xi = 1$  adalah

$$J(E_1^*) = \begin{bmatrix} -(\eta_2 + \mu + mN_2^*) & \beta_2 & 0 & 0 \\ \eta_2 & -(\nu + \alpha + mN_2^*) & 0 & 0 \\ -mI_d^* & -mI_a^* & -[\eta_2 + \mu + \gamma + m(I_a^* + N_2^*)] & \beta_2 - mI_a^* \\ -mI_d^* & -mI_a^* & \eta_2 - mI_d^* & -(\alpha + \gamma + m(I_d^* + N_2^*)) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_1 & G_2 \\ G_3 & G_4 \end{bmatrix}$$

Maka  $\text{trace}(J(E_1^*)) = \text{trace}(G_1) + \text{trace}(G_2)$

$$= -(\eta_1 + \mu + \nu + \alpha + 2mN_2^*) - [\eta_2 + \mu + \alpha + 2\gamma + m(I_a^* + I_d^* + 2N_2^*)]$$

dan  $\det(J(E_1^*)) = \det(G_1) \det(G_2)$

$$\begin{aligned} &= \{(\eta_1 + \mu + mN_2^*)(\nu + \alpha + mN_2^*) - \beta_1\eta_1\} \{[\eta_2 + \mu + \gamma + m(I_d^* + N_2^*)] \\ &\quad [\alpha + \gamma + m(I_d^* + N_2^*)] - (\eta_2 - mI_d^*)(\beta_2 - mI_d^*)\} \\ &= \{\alpha(\eta_1 + \mu)(1 - R_1) + (\eta_1 + \mu)(\nu + mN_2^*) + mN_2^*(\nu + \alpha + mN_2^*)\} \{mN_2^*(\eta_2 + \mu + 2\gamma \\ &\quad + \alpha + m(I_d^* + I_a^* + N_2^*))\}. \end{aligned}$$

Karena semua parameter diasumsikan positif, maka  $\text{trace}(J(E_1^*)) < 0$  dan  $\det(J(E_1^*)) > 0$

jika  $R_1 \leq 1$  di mana  $R_1 = \left(\frac{\beta_1}{\alpha}\right)\left(\frac{\eta_1}{\eta_1 + \mu}\right)$  adalah rasio reproduksi *susceptible*.

Ini berarti, matriks  $J(E_1^*)$  mempunyai nilai-nilai eigen negatif. Jadi, titik kepunahan *susceptible* untuk kasus  $\xi = 1$   $E_1^* = (0, 0, I_a^*, I_d^*)$  adalah stabil asimptotik lokal.

Didefinisikan fungsi Lyapunov  $V : \{(S_a, S_d, I_a, I_d) \in \mathbb{R}_+^4 \mid I_a, I_d > 0\} \rightarrow \mathbb{R}$  dengan

$$V(X) = \omega_1 S_a + S_d, \quad X = (S_a, S_d, I_a, I_d) \in \mathbb{R}_+^4, \quad \omega_1 = \frac{\eta_1}{\eta_1 + \mu}.$$

Maka turunan dari  $V$  sepanjang solusi dari sistem (1) adalah

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \omega_1 (\beta_1 S_d + (1 - \xi)\beta_2 I_d - \eta_1 S_a - \mu S_a - mS_a N) + (\eta_1 S_a - \frac{\nu S_d I_d}{S_d + I_d} - \alpha S_d - mS_d N) \\ &= (\eta_1 + \mu) \left( \frac{\eta_1}{\eta_1 + \mu} - \omega_1 \right) S_a + (\delta_1 \beta_1 - \alpha) S_d - \frac{\nu S_d I_d}{S_d + I_d} - mVN \\ &= \alpha(R_1 - 1)S_d - \frac{\nu S_d I_d}{S_d + I_d} - mVN. \end{aligned}$$

Karena  $R_1 \leq 1$ , maka  $\frac{dV(X)}{dt} \leq 0$  untuk  $X \in \mathbb{R}_+^4$ . Selanjutnya,  $\frac{dV(X)}{dt} = 0$  hanya jika

$S_a = S_d = 0$  atau  $\xi = 1$ . Himpunan invarian maksimum dalam  $\{X \in \mathbb{R}_+^4 \mid \frac{dV(X)}{dt} = 0\}$  adalah singleton

$\{E_1^*\} = \{(0, 0, I_a^*, I_d^*)\}$ . Menggunakan Prinsip Invariansi Lyapunov-LaSalle, titik kesetimbangan kepunahan *susceptible*  $E_1^* = (0, 0, I_a^*, I_d^*)$  adalah stabil global.

## 5. Simulasi Numerik

Untuk mengilustrasikan beberapa hasil analitik di atas, dilakukan simulasi numerik model sistem (1) menggunakan data kasus HIV/AIDS di Indonesia tahun 2007 ([8]) dengan *carrying capacity* karena kompetisi internal diestimasi 280.000.000 jiwa dan nilai parameter-parameter model diestimasi menggunakan rumus dari [6] disajikan dalam Tabel 1.

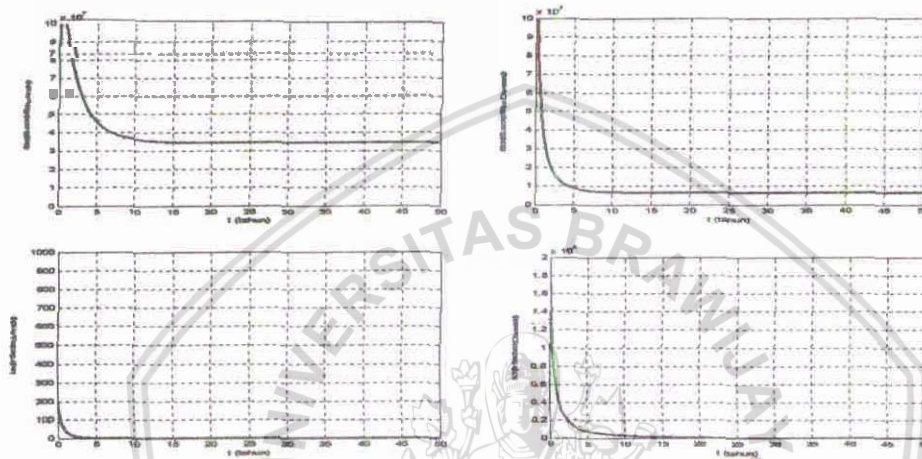
Tabel 1 Nilai Parameter Model Epidemik HIV/AIDS

Parameter	Simbol	Nilai (tahun)
Laju kelahiran per kapita subpopulasi anak-anak	$\beta_1$	2.19994
Laju kelahiran per kapita subpopulasi dewasa	$\beta_2$	0.00006
Laju kematian alami subpopulasi anak-anak/dewasa	$\mu$	0.0345
Laju kematian per kapita dari individu dewasa	$\alpha$	0.01409
Laju kematian per kapita dari penyakit	$\gamma$	0.05632
Peluang kontak antara individu dewasa	$\nu$	0.24657



Laju maturasi per kapita subpopulasi anak-anak	$\eta_1$	0.0625
Laju maturasi per kapita subpopulasi dewasa	$\eta_2$	0.0625
Kompetisi internal $[(\beta_1 - \alpha)/K], K = \text{carying capacity}$	$m$	$7.8 \times 10^{-9}$

Menggunakan nilai-nilai parameter dalam Tabel 1,  $R_0 = 0.000035$ ,  $R_1 = 100.60235$  dan  $R_2 = 3.50192$ . Karena  $R_1 = 100.60235 > 1$  dan  $R_0 = 0.000035 < 1$ , maka sistem (1) mempunyai satu titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_0^* = (34258263, 6455834, 0, 0)$  dan tidak terdapat titik kesetimbangan kepunahan *susceptible*  $E_1^*$ . Menggunakan metode Runge-Kutta orde empat untuk data dalam Tabel 1 dan subpopulasi awal (pada tahun 2007), Gambar 1 menyajikan solusi grafik dari sistem (1).



Gambar 4.1 Kestabilan lokal titik kesetimbangan bebas penyakit dari system (1)  
 $S_a(0) = 66112939$ ,  $S_d(0) = 66112939$ ,  $I_a(0) = 159511978$ ,  $I_d(0) = 203$  dan  $I_d(0) = 17207$ .

Dari Gambar 4.1 tampak bahwa setelah kurang lebih 22 tahun masing-masing kurva dari  $S_a, S_d, I_a$  dan  $I_d$  konvergen menuju ke titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_0^* = (34258263, 6455834, 0, 0)$ . Karena  $R_2 > 1 - R_0$ , maka titik kesetimbangan bebas penyakit tidak stabil global.

## 6. Kesimpulan

Untuk penyakit tanpa *recovery*, kestabilan model epidemik HIV/AIDS dengan kelompok umur dan kompetisi internal adalah sebagai berikut:

1. Jika rasio reproduksi *susceptible* lebih besar satu ( $R_1 > 1$ ), maka terdapat satu titik kesetimbangan bebas penyakit. Jika rasio reproduksi *infected* kurang dari satu dan jumlah laju kontak infeksi dan rasio reproduksi *infected* kurang dari satu ( $R_0 < 1$  dan  $R_0 + R_2 \leq 1$ ), maka titik kesetimbangan bebas penyakit akan stabil asimptotik lokal (global).
2. Jika rasio reproduksi *infected* lebih besar dari satu dan bayi yang lahir dari perempuan hamil terinfeksi adalah infeksi ( $R_0 > 1$  dan  $\xi = 1$ ), maka terdapat satu titik kesetimbangan kepunahan *susceptible*. Jika rasio reproduksi *susceptible* kurang dari atau sama dengan satu ( $R_1 \leq 1$ ), maka titik kesetimbangan kepunahan *susceptible* akan stabil asimptotik lokal (global).



### Daftar Pustaka

- [1] Kermack, W.O dan McKendrick, A.G. (1927) A Contribution to the Mathematical of Epidemics, *Proceedings of the Royal Society of London* 1997; 115;700-721.
- [2] Murray, J. D. (1993) *Mathematical Biology*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York.
- [3] Anderson, R.M., (2001) The Role of Mathematical Models in The Study of HIV Transmission and The Epidemiology of AIDS, *J. AIDS* 1;214-256.
- [4] Brauer, F. and Castillo-Chavez, C. (2001) *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*, Text in Applied Math Vol. 40, Springer Verlag.
- [5] López, R.(2006) Structured SI Epidemic Models with Applications to HIV Epidemic, PhD Thesis online, Arizona State University (ASU).
- [6] Lopez, R., Kuang, Y. dan Tridane, A. (2007). A Simple SI with Two age groups and Its Application to US HIV epidemics: To Treat or Not to Treat, *Journal of Biological Systems* 2007; 15; 169-184.
- [7] Rao, A.S.R.S. (1993) *Mathematical modeling of AIDS Epidemic in India*, Current Science; Vol. 84 No. 9.
- [8] Anonim (2007). *Profil Kesehatan Indonesia*, Depkes RI

### Lampiran: (Prinsip Invariansi Lyapunov-LaSalle)

Misalkan  $V : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  adalah fungsi Lyapunov untuk  $\dot{x} = f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$  pada daerah  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . Misalkan  $E = \{x \in \Omega \mid V(x) = 0\}$  dan  $M$  adalah himpunan invarian terbesar dalam  $E$ . Maka setiap solusi terbatas  $x(t)$  dalam  $\Omega$  menuju  $M$  untuk  $t \rightarrow \infty$ .

## B. DRAF ARTIKEL ILMIAH



## ANALISIS KESTABILAN EPIDEMIK HIV/AIDS DENGAN KELOMPOK UMUR DAN KEPADATAN PENDUDUK

Marsudi dan Kwardinia A.<sup>1</sup>

<sup>1</sup>KBI Matematika Terapan, Jurusan Matematika Universitas Brawijaya Malang  
e-mail: marsudi61@ub.ac.id

### ABSTRAK

Sampai saat ini, masalah HIV/AIDS adalah masalah kesehatan masyarakat yang serius. Penderita AIDS umumnya didominasi oleh kelompok usia remaja dan usia produktif. Pola penyebaran infeksi yang umum terjadi melalui hubungan seksual (*sexually transmitted diseases* = STD). Ancaman epidemik telah terlihat melalui data kasus HIV/AIDS yang terus meningkat.

Makalah ini mengkaji dan mengimplementasikan suatu model matematika deterministik sederhana *SI* (*susceptible-infected*) untuk menganalisis kestabilan model epidemik HIV/AIDS dengan kelompok umur dan kepadatan penduduk. Populasi dibagi menjadi dua subpopulasi, yaitu subpopulasi anak-anak dan subpopulasi dewasa. Subpopulasi dewasa di■■■■■■ aktif seksual dan subpopulasi *infected* dewasa melahirkan bayi *susceptible* dan bayi *infected*. Secara analitik, kestabilan lokal dan global dari titik kesetimbangan model (bebas penyakit dan kepunahan *susceptible*) dianalisis menggunakan kombinasi analisis persamaan karakteristik dari matriks Jacobi dan prinsip invariansi Lyapunov-LaSalle atau menggunakan kondisi nilai-nilai ambang rasio reproduksi *susceptible* ( $R_1$ ), rasio reproduksi *infected* ( $R_i$ ) dan laju kontak *infectious* ( $R_2$ ).

Untuk kasus data HIV/AIDS di Indonesia dengan populasi awal tahun 2009, nilai-nilai ambang  $R_1 = 99.2236$ ,  $R_0 = 0.0001169$  dan  $R_2 = 0.9878$ . Model epidemik HIV/AIDS mempunyai satu titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_1^* = (55.029.000, 10.450.000, 0, 0)$ . Titik kesetimbangan bebas penyakit adalah stabil asimtotik global setelah kira-kira 18 tahun.

**Kata Kunci :** model HIV/AIDS, model *SI*, rasio reproduksi, kestabilan global



## STABILITY ANALYSIS FOR THE HIV/AIDS EPIDEMIC MODEL WITH INFLUENCE OF THE AGE GROUP AND POPULATION DENSITY

### ABSTRACT

Until recently, the issue of HIV/AIDS is a serious public health problem. AIDS sufferer are generally dominated by a age group of adolescent and a productive age. The general pattern of the spread of infection occur through sexual contact (sexually transmitted diseases = STD). The threat of epidemics were seen through the data of cases of HIV/AIDS continues to rise.

This paper examines and implement a deterministic mathematical model of a simple SI (susceptible-infected) model to analyze the stability of the HIV/AIDS by age group and population density. The population is divided into two subpopulations, namely subpopulation of juvenile and adults. Subpopulation of adults who are sexually active is assumed produce both susceptible newborns and infected newborns. The local and global stability for the equilibrium point of the model were analyzed using a combination of analysis of eigenvalues of Jacobian matrix and the Lyapunov-LaSalle's invariant principle or using a threshold values of the susceptible reproduced ratio ( $R_1$ ), the infected reproduced ratio ( $R_0$ ), and the infection contact rate ( $R_2$ ).

For the case of data of HIV/AIDS in Indonesia with initial population of 2009, the threshold values of the susceptible reproduction ratio,  $R_1 = 99.2236$ , the infected reproduction ratio,  $R_0 = 0.0001169$  and the infection contact rate,  $R_2 = 0.9878$ . The model of the HIV/AIDS has a unique disease-free equilibrium point,  $E_1^* = (55.029.000, 10.450.000, 0, 0)$ . The disease-free equilibrium point is globally asymptotically stable after approximately 18 years.

**Key words:** HIV/AIDS model, SI model, the reproduction ratio, the equilibrium point, Global stability

## 1 PENDAHULUAN

Saat ini, infeksi HIV (*human immunodeficiency virus*) yang dapat menyebabkan AIDS (*acquired immunodeficiency syndrome*) memiliki tingkat prevalensi yang tinggi dalam populasi hampir di semua negara. Di awal abad 20, model matematika diperkenalkan ke dalam epidemiologi oleh Kermack and McKendrick (1927). Model matematika telah banyak terbukti dalam membantu pemahaman fenomena penyebaran penyakit infeksius. Misalnya, Murray (1993) menggunakan model SIR untuk model epidemik penyakit infeksius.

Pada awalnya, model matematika untuk epidemik HIV hanya bersifat spekulatif dengan memasukkan aspek-aspek biologi dan perilaku dalam model, misalnya Brauer and Castillo-Chavez (2001) dan Rao (1993). Saat ini banyak penelitian tentang analisis matematika dari model dinamika yang disebarkan melalui kontak seksual dan dikombinasikan dengan data sehingga menjadi populer (Anderson, 2001). Model matematika telah dikembangkan dan digunakan untuk penyakit yang ditularkan melalui hubungan seksual. Penyakit yang disebarkan melalui kontak seksual (*sexually transmitted diseases*=STD) adalah penularan yang ditransfer dari satu orang ke satu orang lain melalui kontak seksual di dalam populasi. Lopez *et al.* (2007) menggunakan model matematika untuk STD yang berkaitan dengan dinamika HIV dengan struktur usia yang diterapkan di Amerika Serikat. Dalam hal ini, subpopulasi dimodelkan melalui proses epidemik SI yang sesuai untuk STD tanpa *recovery*.

Model epidemik HIV/AIDS yang digunakan dalam makalah ini merujuk pada model yang dipelajari oleh Lopez *et al.* (2007) disesuaikan dengan data HIV/AIDS di Indonesia. Model epidemik HIV/AIDS dideskripsikan menggunakan model kompartemen, di mana secara demografi populasi dibagi menjadi dua subpopulasi, yaitu kelompok anak-anak berusia 0-14 tahun dan kelompok dewasa berusia 15 tahun ke atas. Jika jumlah populasi terus meningkat dan sementara keadaan demografi atau lingkungannya mempunyai jumlah sumber yang terbatas, maka akan terjadi kepadatan penduduk karena kompetisi internal dan mempengaruhi keberlangsungan hidup bahkan dapat menyebabkan kematian individu dalam populasi tersebut.



## 2. MODEL SI DENGAN KELOMPOK UMUR

Secara demografi populasi dibagi menjadi dua subpopulasi, yaitu kelompok anak-anak dan kelompok dewasa. Secara epidemiologi, masing-masing subpopulasi terdiri dari dua kelompok, yaitu *Susceptibles* ( $S_a$  dan  $S_d$ ) dan *Infected* ( $I_a$  dan  $I_d$ ). Berdasarkan transisi antara kedua subpopulasi, model dapat disajikan ke dalam model matematika sederhana (model SI) berbentuk sistem persamaan diferensial nonlinear

$$\begin{aligned}\frac{dS_a}{dt} &= \beta_1 S_d + (1-\xi)\beta_2 I_d - \eta_1 S_a - \mu S_a - m S_a N \\ \frac{dS_d}{dt} &= \eta_1 S_a - \frac{S_d I_d}{S_d + I_d} - \alpha S_d - m S_d N \\ \frac{dI_a}{dt} &= \xi \beta_2 I_d - \eta_2 I_a - \mu I_a - \gamma I_a - m I_a N \\ \frac{dI_d}{dt} &= \eta_2 I_a + \frac{S_d I_d}{S_d + I_d} - \alpha I_d - \gamma I_d - m I_d N\end{aligned}\quad (1)$$

dengan  $N = S_a + I_a + S_d + I_d$ . Diasumsikan bahwa dalam model ini penyakit tanpa *recovery* dan perubahan populasi total adalah konstan.

## 3 ANALISIS KESTABILAN MODEL

Misalkan  $\mathbb{R}_+^4 = (0, \infty)$  adalah himpunan vektor-vektor positif  $X = (S_a, S_d, I_a, I_d)$  dengan  $S_a > 0, S_d > 0, I_a > 0, I_d > 0$  dan  $F: \mathbb{R}_+^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$  di mana  $F(X) = (F_1(X), F_2(X), F_3(X), F_4(X))$  adalah fungsi kontinu di mana  $F_i(X)$  adalah fungsi (persamaan ke- $i$ ) pada ruas kanan sistem (1) yang mempunyai derivatif-derivatif parsial terhadap  $S_a, S_d, I_a$  dan  $I_d$  dan kontinu di  $\mathbb{R}_+^4$ . Maka  $F$  adalah kontinu Lipschitz lokal di  $\mathbb{R}_+^4$ . Dengan demikian, ada jaminan eksistensi dan ketunggalan solusi  $(S_a, S_d, I_a, I_d)$  untuk sistem (1) jika memenuhi kondisi awal  $S_a = S_a^0, S_d = S_d^0, I_a = I_a^0, I_d = I_d^0$  dan  $S_a^0 \geq 0, S_d^0 \geq 0, I_a^0 \geq 0$  dan  $I_d^0 \geq 0$ .

Titik kesetimbangan model epidemik HIV/AIDS dengan kelompok umur dan kepadatan penduduk diperoleh dari sistem (1) dengan menyamakan ruas kanan sama dengan nol, diperoleh kondisi kesetimbangan



$$\begin{aligned}
\beta_1 S_a + (1-\xi) \beta_2 I_d - \eta_1 S_a - \mu S_a - m S_a N &= 0 \\
\eta_1 S_a - \frac{\nu S_d I_d}{S_d + I_d} - \alpha S_d - m S_d N &= 0 \\
\xi \beta_2 I_d - \eta_2 I_a - \mu I_a - \gamma I_a - m I_a N &= 0 \\
\eta_2 I_a + \frac{\nu S_d I_d}{S_d + I_d} - \alpha I_d - \gamma I_d - m I_d N &= 0
\end{aligned} \tag{2}$$

### (1) Titik Keseimbangan Trivial

Sistem (1) mempunyai titik keseimbangan trivial  $E_0^* = (0, 0, 0, 0)$ . Karena  $f(I_a, I_d)$  tidak diferensibel pada  $(I_a, I_d) = (0, 0)$ , maka analisis kestabilan pada titik keseimbangan trivial tidak dapat dilakukan dengan metode linearisasi.

### (2) Titik Keseimbangan Bebas Penyakit

Dari kondisi (2)  $I_a^* = I_d^* = 0$  dan diperoleh titik keseimbangan bebas penyakit  $E_1^* = (S_a^*, S_d^*, 0, 0)$ . Titik keseimbangan bebas penyakit terjadi jika tidak ada individu yang terinfeksi dalam subpopulasi anak-anak ( $I_a^* = 0$ ) dan subpopulasi dewasa ( $I_d^* = 0$ ). Dengan mensubstitusikan  $I_a^* = 0$  dan  $I_d^* = 0$  ke persamaan (2) diperoleh kondisi keseimbangan

$$\begin{aligned}
-(\eta_1 + \mu) S_a^* + \beta_1 S_d^* - m S_a^* (S_a^* + S_d^*) &= 0 \\
\eta_1 S_a^* - \alpha S_d^* - m S_d^* (S_a^* + S_d^*) &= 0.
\end{aligned} \tag{3}$$

Dengan menyelesaikan sistem (5.3) diperoleh

$$S_a^* = \frac{(\alpha + m N_1^*) N_1^*}{\alpha + \eta_1 + m N_1^*} \text{ dan } S_d^* = \frac{\eta_1 N_1^*}{\alpha + \eta_1 + m N_1^*} \tag{4}$$

di mana  $N_1^* = \frac{-(\eta_1 + \mu + \alpha) + \sqrt{(\eta_1 + \mu + \alpha)^2 - 4[\alpha(\eta_1 + \mu)(1 - R_1)]}}{2m}$  dengan syarat

$\alpha(\eta_1 + \mu) - \beta_1 \eta_1 < 0$  atau  $R_1 > 1$ . Nilai ambang  $R_1 = \left( \frac{\beta_1}{\alpha} \right) \left( \frac{\eta_1}{\eta_1 + \mu} \right)$  didefinisikan sebagai

rasio reproduksi *susceptible* atau rata-rata jumlah bayi *susceptible* yang dilahirkan oleh individu *susceptible* selama hidupnya (Lopez *et al.*, 2007).

Jadi, sistem (1) mempunyai titik keseimbangan bebas penyakit  $E_1^* = (S_a^*, S_d^*, 0, 0)$  dengan  $S_a^*$  dan  $S_d^*$  ditunjukkan dalam persamaan (4) jika  $R_1 > 1$ .

Matriks Jacobi dari model (1) pada titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_1^* = (S_a^*, S_d^*, 0, 0)$  adalah

$$J(E_1^*) = \begin{pmatrix} -[\eta_1 + \mu + m(S_a^* + N_1^*)] & \beta_1 - mS_d^* & -mS_d^* & (1-\xi)\beta_2 - mS_d^* \\ \eta_1 - mS_d^* & -[\alpha + m(S_d^* + N_1^*)] & -mS_d^* & -(\nu + mS_d^*) \\ 0 & 0 & -(\eta_2 + \mu + \gamma + mN_1^*) & \xi\beta_2 \\ 0 & 0 & \eta_2 & \nu - (\alpha + \gamma + mN_1^*) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \mathbf{B}_1 & \mathbf{B}_3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{B}_2 \end{pmatrix}.$$

di mana matriks-matriks  $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3$  dan  $\mathbf{0}$  adalah matriks berukuran  $2 \times 2$  dengan  $\mathbf{0}$  adalah matriks nol. Untuk menunjukkan bahwa nilai-nilai eigen dari matriks Jacobi  $J(E_1^*)$  adalah negatif cukup ditunjukkan bahwa nilai-nilai eigen dari matriks  $\mathbf{B}_1$  dan  $\mathbf{B}_2$  adalah negatif.

- $\text{trace}(\mathbf{B}_1) = -[\eta_1 + \mu + \alpha + m(S_a^* + S_d^* + 2N_1^*)]$  dan  $\text{trace}(\mathbf{B}_2) = -[\eta_2 + \mu + \gamma + 2mN_1^*] + (\alpha + \gamma - \nu)$
- $\det(\mathbf{B}_1) = mS_a^*(\eta_1 + \alpha + mN_1^*) + mS_d^*(\eta_1 + \mu + \beta_1 + mN_1^*)$  dan  $\det(\mathbf{B}_2) = (mN_1^*)^2 + (\eta_2 + \mu + \gamma)(\alpha + \gamma)[1 - (R_0 + R_2)] + mN_1^*[(\alpha + \gamma - \nu) + \eta_2 + \mu + \gamma]$ .

Karena semua parameter diasumsikan positif, maka  $\text{trace}(\mathbf{B}_1) < 0$  dan  $\det(\mathbf{B}_1) > 0$ .

Selanjutnya  $\text{trace}(\mathbf{B}_2) < 0$  jika diasumsikan  $\alpha + \gamma > \nu$  atau  $R_2 < 1$  di mana  $R_2 = \frac{\nu}{\alpha + \gamma}$  adalah laju kontak *infectious*, yaitu rata-rata jumlah kontak dari individu *infected* dewasa selama hidupnya. Nilai  $\det(\mathbf{B}_2) > 0$  jika  $R_0 + R_2 \leq 1$  di mana  $R_0 = \left( \frac{\xi\beta_2}{\alpha + \gamma} \right) \left( \frac{\eta_2}{\eta_2 + \mu + \gamma} \right)$  adalah rasio reproduksi subpopulasi *infected*, yaitu rata-rata jumlah bayi *infected* yang dilahirkan oleh individu *infected* selama hidupnya (Lopez *et al.*, 2007).

Jadi, titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_1^*$  adalah stabil asimtotik lokal jika  $R_2 < 1$  dan  $R_0 + R_2 \leq 1$ .

Lopez *et al.* (2007) telah menunjukkan bahwa solusi trivial dari sistem *repeller* atau  $\limsup_{t \rightarrow \infty} N(t) > 0$  jika  $R_1 > \frac{(\eta_1 + \mu)(\nu + \alpha)}{\eta_1 \alpha}$ . Didefinisikan fungsi Lyapunov

$$V : \Omega = \{(S_a, S_d, I_a, I_d) \in \mathbb{R}_+^4 \mid I_a, I_d > 0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

dengan  $V(X) = \omega_2 I_a + I_d$ ,  $X = (S_a, S_d, I_a, I_d) \in \mathbb{R}_+^4$ ,  $\omega_2 = \frac{\eta_2}{\eta_2 + \mu + \gamma}$

Maka turunan dari  $V(X)$  sepanjang solusi untuk sistem (1) adalah

$$\begin{aligned} \frac{dV(X)}{dt} &= \omega_2 (\xi \beta_2 I_d - \eta_2 I_a - \mu I_a - \gamma I_a - m I_a N) + (\eta_2 I_a - \frac{\nu S_d I_d}{S_d + I_d} \\ &\quad - \alpha I_d - \gamma I_d - m I_d N) \\ &= (\eta_2 + \mu + \gamma) \left( \frac{\eta_2}{\eta_2 + \mu + \gamma} - \omega_2 \right) I_a + (\omega_2 \xi \beta_2 - (\alpha + \gamma) I_d + \frac{\nu S_d I_d}{S_d + I_d} - m V N) \\ &\leq (\alpha + \gamma - \nu) \left( \frac{\xi \beta_2 \eta_2}{(\eta_2 + \mu + \gamma)(\alpha + \gamma - \nu)} - 1 \right) I_d - m V N. \end{aligned}$$

Karena diasumsikan  $\alpha + \gamma > \nu$  atau  $R_2 < 1$ , maka  $\frac{\xi \beta_2 \eta_2}{(\eta_2 + \mu + \gamma)(\alpha + \gamma - \nu)} < 1$ . Menurut Lopez *et al.*

(2007),  $\frac{\xi \beta_2 \eta_2}{(\eta_2 + \mu + \gamma)(\alpha + \gamma - \nu)} < 1$  ekuivalen dengan  $R_0 + R_2 \leq 1$ . Jadi,  $\frac{dV(X)}{dt} \leq 0$  untuk  $X \in \mathbb{R}_+^4$ .

$\frac{dV(X)}{dt} = 0$  jika dan hanya jika  $S_a = S_a^*$ ,  $S_d = S_d^*$ ,  $I_a = 0$  dan  $I_d = 0$ .

Oleh karena itu, himpunan invarian terbesar dalam

$$\{X \in \mathbb{R}_+^4 \mid \frac{dV(X)}{dt} = 0\} = \{(S_a, S_d, 0, 0) \mid S_a \geq 0, S_d \geq 0\}$$

adalah singleton  $\{E_1^*\} = \{(S_a^*, S_d^*, 0, 0)\}$ . Menurut Prinsip Invariansi Lyapunov-LaSalle, semua solusi positif dari sistem (1) menuju  $E_1^*$  untuk  $t \rightarrow \infty$ .

Jadi, titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_1^* = (S_a^*, S_d^*, 0, 0)$  stabil global dalam  $\mathbb{R}_+^4$  jika

$$R_1 > \frac{(\eta_1 + \mu)(\nu + \alpha)}{\eta_1 \alpha} \text{ dan } R_2 \leq 1 - R_0.$$

### (3) Titik Kesetimbangan Kepunahan Susceptible

Dari kondisi kesetimbangan (2), diperoleh  $S_a^* = 0$  dan  $S_d^* = 0$  dan diperoleh titik kesetimbangan kepunahan susceptible (susceptible extinction)  $E_2^* = (0, 0, I_a^*, I_d^*)$ . Titik kesetimbangan kepunahan susceptible terjadi jika tidak ada individu sehat dalam subpopulasi anak-anak ( $S_a^* = 0$ ) dan tidak ada individu sehat dalam subpopulasi dewasa ( $S_d^* = 0$ ). Dengan mensubstitusikan  $S_a^* = 0$  dan  $S_d^* = 0$  ke persamaan (2), kondisi kesetimbangan menjadi



$$\begin{aligned}
 (1-\xi)\beta_2 I_a^* &= 0 \\
 -(\eta_2 + \mu + \gamma)I_a^* + \beta_2 I_d^* - mI_a^*(I_a^* + I_d^*) &= 0 \\
 \eta_2 I_a^* - (\alpha + \gamma)I_d^* - mI_d^*(I_a^* + I_d^*) &= 0.
 \end{aligned} \tag{5}$$

(i) Kasus  $\xi = 1$ .

Jika semua anak yang lahir dari ibu terinfeksi adalah terinfeksi, maka terdapat titik kesetimbangan kepunahan *susceptible*  $E_2^* = (0, 0, I_a^*, I_d^*)$  di mana

$$I_a^* = \frac{(\alpha + \gamma + mN_2^*)N_2^*}{\alpha + \eta_2 + \gamma + mN_2^*} \text{ dan } I_d^* = \frac{\eta_2 N_2^*}{\alpha + \eta_2 + \gamma + mN_2^*}. \tag{6}$$

$$\text{di mana } N_2^* = \frac{-(\eta_2 + \mu + \alpha + 2\gamma) + \sqrt{(\eta_2 + \mu + \alpha + 2\gamma)^2 - 4[(\alpha + \gamma)(\eta_2 + \mu + \gamma)(1 - R_0)]}}{2m}$$

dengan syarat  $(\alpha + \gamma)(\eta_2 + \mu + \gamma) - \beta_2 \eta_2 < 0$  atau  $R_0 > 1$ .

Jadi, sistem (1) mempunyai titik kesetimbangan kepunahan *susceptible*  $E_2^* = (0, 0, I_a^*, I_d^*)$  dengan  $I_a^*$  dan  $I_d^*$  ditunjukkan dalam persamaan (6) jika  $R_0 > 1$  dan  $\xi = 1$ .

(ii) Kasus  $0 \leq \xi < 1$ . Jika anak yang lahir dari ibu terinfeksi adalah sehat, maka tidak terdapat titik kesetimbangan kepunahan *susceptible*  $E_2^*$  sebab dari sistem (5),  $I_a^* = I_d^* = 0$ .

Matriks Jacobi dari model (1) pada titik kesetimbangan  $E_2^* = (0, 0, I_a^*, I_d^*)$  untuk kasus  $\xi = 1$  adalah

$$\begin{aligned}
 J(E_2^*) &= \begin{bmatrix} -(\eta_1 + \mu + mN_2^*) & \beta_1 & 0 & 0 \\ \eta_1 & -(\nu + \alpha + mN_2^*) & 0 & 0 \\ -mI_a^* & -mI_d^* & -[\eta_2 + \mu + \gamma + m(I_a^* + N_2^*)] & \beta_2 - mI_a^* \\ -mI_d^* & \nu - mI_d^* & \eta_2 - mI_d^* & -[\alpha + \gamma + m(I_d^* + N_2^*)] \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} G_1 & 0 \\ G_3 & G_2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

di mana matriks-matriks  $G_1, G_2, G_3$  dan  $0$  adalah matriks berukuran  $2 \times 2$  dengan  $0$  adalah matriks nol.

Untuk menunjukkan bahwa nilai-nilai eigen dari matriks Jacobi  $J(E_2^*)$  adalah negatif cukup ditunjukkan bahwa nilai-nilai eigen dari matriks  $G_1$  dan  $G_2$  adalah negatif.

$$\bullet \text{trace}(\mathbf{G}_1) = -[\eta_1 + \mu + \nu + \alpha + 2mN_2^*] \text{ dan } \text{trace}(\mathbf{G}_2) = -[\eta_2 + \mu + 2\gamma + \alpha + m(I_a^* + I_d^* + 2N_2^*)]$$

$$\bullet \det(\mathbf{G}_1) = \alpha(\eta_1 + \mu)(1 - R_1) + (\eta_1 + \mu)(\nu + mN_2^*(\nu + \alpha + mN_2^*)) \text{ dan}$$

$$\det(\mathbf{G}_2) = [\eta_2 + \mu + \gamma + m(I_a^* + N_2^*)][\alpha + \gamma + m(I_d^* + N_2^*)] + (\alpha + \gamma + mI_d^*)(\eta_2 + \mu + \gamma + mI_a^*).$$

Karena semua parameter diasumsikan positif, maka  $\text{trace}(\mathbf{G}_1) < 0$  dan  $\det(\mathbf{G}_1) > 0$ .  $R_1 \geq 1$ . Selanjutnya, jelas  $\text{trace}(\mathbf{G}_2) < 0$  dan  $\det(\mathbf{G}_2) > 0$ .

Jadi, titik kesetimbangan kepunahan *susceptible*  $E_2^*$  adalah stabil asimtotik lokal jika  $R_1 < 1$ ,  $R_0 > 1$  dan  $\xi = 1$ .

Lopez *et al.* (2007) telah menunjukkan bahwa solusi trivial dari sistem *repeller* atau  $\limsup_{t \rightarrow \infty} N(t) > 0$  jika  $R_0 > \frac{\mu + \eta_2 + \gamma}{\eta_2}$ . Selanjutnya didefinisikan fungsi Lyapunov

$$V: \{(S_a, S_d, I_a, I_d) \in \mathbb{R}_+^4 \mid I_a, I_d > 0\} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$\text{dengan } V(X) = \omega_1 S_a + S_d, \quad X = (S_a, S_d, I_a, I_d) \in \mathbb{R}_+^4, \quad \omega_1 = \frac{\eta_1}{\eta_1 - \mu}.$$

Maka turunan dari  $V$  sepanjang solusi dari sistem (1) adalah

$$\begin{aligned} \frac{dV}{dt} &= \omega_1 (\beta_1 S_d + (1 - \xi)\beta_2 I_d - \eta_1 S_a - \mu S_a - mS_a N) + (\eta_1 S_a - \frac{\omega_1 I_d}{S_d + I_d} - \alpha S_d - mS_d N) \\ &= (\eta_1 + \mu) \left( \frac{\eta_1}{\eta_1 + \mu} - \omega_1 \right) S_a + (\delta_1 \beta_1 - \alpha) S_d - \frac{\omega_1 I_d}{S_d + I_d} - mVN = \alpha(R_1 - 1)S_d - \frac{\omega_1 I_d}{S_d + I_d} - mVN. \end{aligned}$$

Karena  $R_1 \leq 1$ , maka  $\frac{dV(X)}{dt} \leq 0$  untuk  $X \in \mathbb{R}_+^4$ . Selanjutnya,  $\frac{dV(X)}{dt} = 0$  hanya jika

$S_a = S_d = 0$  atau  $\xi = 1$ . Himpunan invarian maksimum dalam  $\{X \in \mathbb{R}_+^4 \mid \frac{dV(X)}{dt} = 0\}$  adalah singleton  $\{E_2^*\} = \{(0, 0, I_a^*, I_d^*)\}$ . Menggunakan Prinsip Invariansi Lyapunov-LaSalle, semua solusi positif dari sistem (5.1) menuju  $E_2^*$  untuk  $t \rightarrow \infty$ .

Jadi, titik kesetimbangan kepunahan *susceptible*  $E_2^* = (0, 0, I_a^*, I_d^*)$  stabil global dalam  $\mathbb{R}_+^4$  jika  $R_1 \leq 1$ ,  $\xi = 1$  dan  $R_0 > \frac{\mu + \eta_2 + \gamma}{\eta_2}$ .



#### 4. Simulasi Numerik untuk Data HIV/AIDS Indonesia

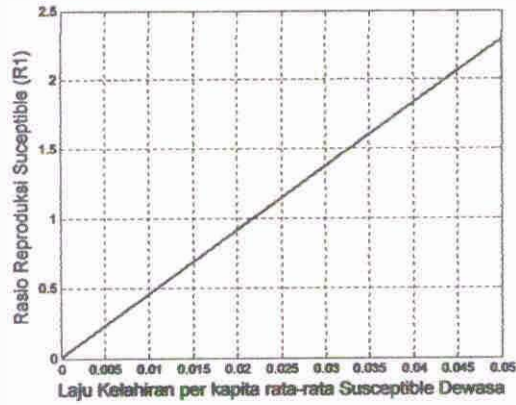
Implementasi model epidemik HIV/AIDS dengan kelompok umur dan kepadatan penduduk untuk Indonesia, dilakukan simulasi numerik model sistem (1) menggunakan data populasi awal Tahun 2009 dan parameter-parameter model diestimasi menggunakan rumus dan metode yang dipakai oleh Marsudi dan Kwardiniya (2011). Berdasarkan data Biro Pusat Statistik (Anonim, 2010a dan 2010b), nilai parameter-parameter model diestimasi menggunakan data HIV/AIDS Indonesia selama 22 tahun (1987-2009) dan *Carrying capacity* ( $K$ ) karena kepadatan penduduk (kompetisi internal) diestimasi menggunakan data kependudukan Indonesia selama 8 tahun (2004-2009). *Carrying capacity* dihitung menggunakan aproksimasi persamaan diferensial logistik dan diperoleh  $K = 448.050.000$  jiwa. Secara ringkas, nilai-nilai parameter model epidemik HIV/AIDS untuk Indonesia disajikan dalam Tabel 1 berikut.

Tabel 1 Estimasi Nilai Parameter Model

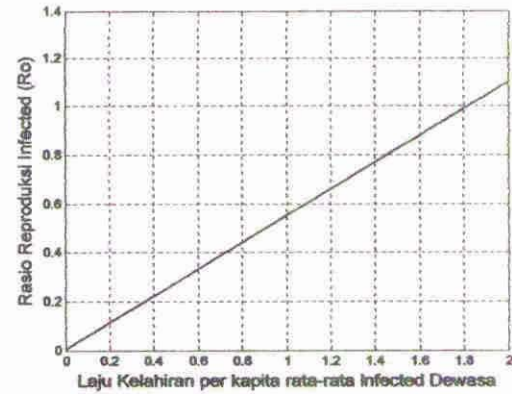
Parameter	Simbol	Nilai (per tahun)
1. Laju kelahiran per kapita subpopulasi anak-anak	$\beta_1$	2,16979
2. Laju kelahiran per kapita subpopulasi dewasa	$\beta_2$	0,0002125
3. Laju kematian alami subpopulasi anak-anak/dewasa	$\mu$	0,0345
4. Laju kematian per kapita dari individu dewasa	$\alpha$	0,01409
5. Laju kematian per kapita dari penyakit	$\gamma$	0,05882
6. Peluang kontak antara individu dewasa	$\nu$	0,07202
7. Laju maturasi per kapita subpopulasi anak-anak	$\eta_1$	0,0625
8. Laju maturasi per kapita subpopulasi dewasa	$\eta_2$	0,0625
9. Kompetisi internal $[(\beta_1 - \alpha) / K]$ , $K = \text{carying capacity}$	$m$	$4,8113 \times 10^{-9}$

Gambar 1 merepresentasikan grafik dari pengaruh laju kelahiran per kapita dari rata-rata *susceptible* dewasa ( $\beta_1$ ) terhadap nilai ambang rasio reproduksi *susceptible* ( $R_1$ ) dan grafik dari pengaruh laju kelahiran per kapita dari rata-rata *infected* dewasa ( $\beta_2$ ) terhadap nilai ambang rasio reproduksi *infected* ( $R_0$ ).





(a)



(b)

Gambar 1 (a) Plot  $\beta_1$  terhadap  $R_1$  (b) Plot  $\beta_2$  terhadap  $R_0$ 

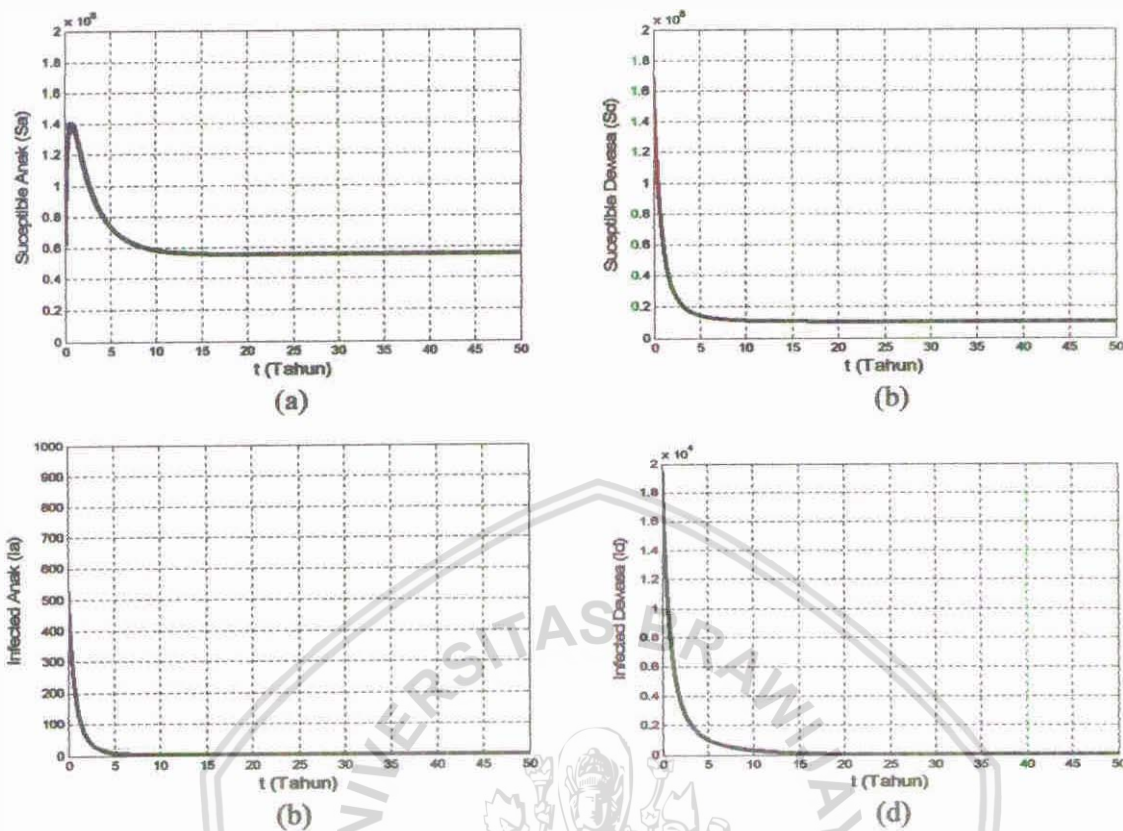
Gambar 1 menunjukkan bahwa jika nilai  $\beta_1$  meningkat, maka  $R_1$  juga meningkat. Demikian juga halnya, jika  $\beta_2$  meningkat maka  $R_0$  juga meningkat. Menggunakan nilai-nilai parameter dalam Tabel 2,  $R_1 = 99,2236$ ,  $R_0 = 0,0001169$ , dan  $R_2 = 0,9878$ . Karena  $R_1 > 1$ ,  $R_0 < 1$  dan  $R_2 < 1 - R_0$ , maka model HIV/AIDS dengan pengaruh kelompok umur dan kepadatan penduduk di Indonesia hanya mempunyai titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_1^* = (55.029.000, 10.450.000, 0, 0)$  yang stabil asimtotik lokal. Hal ini dapat juga dilihat dari matriks Jacobi pada  $E_1^* = (55.029.000, 10.450.000, 0, 0)$ , yaitu

$$J(E_1^*) = \begin{pmatrix} -0,6768 & 1,9050 & -0,2648 & -0,2646 \\ 0,0122 & -0,3794 & -0,0503 & -0,1223 \\ 0 & 0 & -0,4709 & 0,00002125 \\ 0 & 0 & 0,0625 & -0,3159 \end{pmatrix}$$

di mana semua nilai eigen dari  $J(E_1^*)$  adalah negatif  $\lambda_1 = -0,7412$ ,  $\lambda_2 = -0,3150$ ,  $\lambda_3 = -0,4709$  dan  $\lambda_4 = -0,3159$ .

Selanjutnya, karena  $R_2 + R_0 = 0,9879 < 1$  dan  $R_1 = 99,2236 > 2,4931 = \frac{\mu + \eta_2 + \gamma}{\eta_2}$ , maka

titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_1^* = (55.029.000, 10.450.000, 0, 0)$  stabil asimtotik global. Kestabilan global dari titik kesetimbangan bebas penyakit ini dapat dilihat pada grafik solusi numerik model epidemik HIV/AIDS menggunakan metode Runge- Kutta order empat berikut (Gambar 2).



Gambar 2 Kestabilan global titik kesetimbangan bebas penyakit dari model epidemik HIV-AIDS dengan pengaruh kelompok umur dan kepadatan penduduk (Sistem 5.1) untuk kasus HIV/AIDS di Indonesia:  $S_a(0) = 62376714$ ,  $S_d(0) = 168972405$ ,  $I_a(0) = 528$  dan  $I_d(0) = 19445$ .

Gambar 2 (a) menunjukkan bahwa subpopulasi *susceptible* anak ( $S_a$ ) cenderung bertambah pada satu tahun pertama kemudian turun terus hingga 16 tahun pertama dan 16 tahun tampak  $S_a$  konvergen menuju  $S_a^* \approx 55.029.000$ . Gambar 2 (b) menunjukkan bahwa sejak awal tahun hingga 17 tahun pertama subpopulasi *susceptible* dewasa ( $S_d$ ) berkurang terus jumlahnya dan setelah 17 tahun  $S_d$  konvergen menuju  $S_d^* = 10.450.000$ . Kecenderungan subpopulasi *infected* anak ( $I_a$ ) hampir sama seperti subpopulasi *susceptible* dewasa. Dari awal tahun hingga 6 tahun pertama tampak jumlahnya turun terus (Gambar 2 (c)) dan setelah 6 tahun,  $I_a$  konvergen menuju  $I_a^* = 0$ . Demikian juga untuk subpopulasi *infected* dewasa ( $I_d$ ), Gambar 5.5 (d) menunjukkan bahwa sejak awal tahun hingga 18 tahun cenderung turun terus jumlahnya dan setelah 18 tahun,  $I_d$  konvergen menuju  $I_d^* = 0$ . Jadi, setelah 18 tahun jika parameter tidak berubah maka tidak ada individu yang terinfeksi dan subpopulasi *susceptible* anak dan dewasa menuju nilai positif yang konstan.



## 5. Kesimpulan

Untuk penyakit tanpa *recovery*, kestabilan model epidemik HIV/AIDS dengan kelompok umur dan kepadatan penduduk adalah sebagai berikut:

- Jika rasio reproduksi *susceptible* lebih besar satu ( $R_1 > 1$ ), maka terdapat satu titik kesetimbangan bebas penyakit. Titik kesetimbangan ini akan stabil asimtotik lokal jika rasio reproduksi *infected* kurang dari satu dan jumlah laju kontak infeksi dan rasio reproduksi *infected* kurang dari satu ( $R_0 < 1$  dan  $R_0 + R_2 \leq 1$ ) dan stabil asimtotik global jika  $R_1 > \frac{(\eta_1 + \mu)(\nu + \alpha)}{\eta_1 \alpha}$ .
- Jika rasio reproduksi *infected* lebih besar dari satu dan bayi yang lahir dari perempuan hamil terinfeksi adalah infeksi ( $R_0 > 1$  dan  $\xi = 1$ ), maka terdapat satu titik kesetimbangan kepunahan *susceptible*. Titik kesetimbangan ini akan stabil asimtotik lokal jika rasio reproduksi *susceptible* kurang dari atau sama dengan satu ( $R_1 \leq 1$ ) dan stabil asimtotik global jika  $R_0 > \frac{\mu + \eta_2 + \gamma}{\eta_2}$ .
- Untuk kasus data HIV/AIDS di Indonesia dengan data awal tahun 2009, nilai-nilai ambang rasio reproduksi *susceptible*  $R_1 = 99.2236$ , rasio reproduksi *infected*  $R_0 = 0.0001169$  dan laju kontak infeksi  $R_2 = 0.9878$ . Model epidemik HIV/AIDS dengan dua kelompok umur dan kepadatan penduduk mempunyai satu titik kesetimbangan bebas penyakit  $E_1^* = (55.029.000, 10.450.000, 0, 0)$  yang stabil asimtotik global setelah kira-kira 18 tahun.

## UCAPAN TERIMA KASIH

Pada kesempatan ini, kami Tim Peneliti menyampaikan ucapan terima kasih kepada Direktorat Jenderal Penelitian dan Pengabdian Kepada Masyarakat, Direktorat Jenderal Pendidikan Tinggi, Kementerian Pendidikan Nasional atas pembiayaan pelaksanaan Penelitian Fundamental Tahun 2011 ini.



## DAFTAR PUSTAKA

- Anderson, R.M., (2001) *The Role of Mathematical Models in The Study of HIV Transmission and The Epidemiology of AIDS*, *J. AIDS* 1;214-256.
- Anonim (2007). *Profil Kesehatan Indonesia*, Departemen Kesehatan RI. <http://www.depkes.go.id/> Tanggal Akses 12 Agustus 2011.
- Anonim (2007). *Profil Kesehatan Indonesia*, Departemen Kesehatan RI. <http://www.depkes.go.id/> Tanggal Akses 12 Agustus 2011.
- Anonim, (2010a) *Profil Kesehatan Indonesia*. Depkes RI. <http://www.depkes.go.id/> Tanggal Akses 12 Agustus 2011.
- Anonim, (2010b) *Republic of Indonesia Country Report of the Follow up to The Declaration of Commitment on HIV/AIDS: Reporting Period 2008-2009*, National AIDS Commision Republic of Indonesia. Anonim, (2010c) United Nations General Assembly Special Sesion (UNGASS) Country Report. Depkes RI.
- Brauer, F. and Castillo-Chavez, C. (2001) *Mathematical Models in Population Biology and Epidemiology*, Tart in Applied Mathematics Vol. 40, Springer Verlag.
- Hugo. G. (2001) *Mobilitas Penduduk dan HIV/AIDS di Indonesia*, UNAIDS, Indonesia.
- Kermack, W.O san McKendrick, A.G. (1927) A Contribution to the Mathematical of Epidemics, *Proceedings of the Royal Society of London* 1997; 115;700-721.
- Lopez, R., Kuang, Y. dan Tridane, A. (2007). A Simple SI with Two age groups and Its Application to US HIV epidemics: To Treat or Not to Treat, *Journal of Biological Systems* 2007; 15; 169-184.
- Marsudi dan Handamari, E.W. (2006) Model Deterministik dari Dinamika Epidemik Penyakit Infeksius menggunakan Persamaan Diferensial, *Laporan Penelitian*, P3M FMIPA Unibraw Malang.
- Marsudi dan Trisilowati (2004) Model Penyebaran Epidemik dan Penyebaran Spatial (Geografi) Epidemik Demam Berdarah, *Jurnal Ilmu-Ilmu Hayati (Live Science)*, Vol. 16 Nomor 1, Lemlit Unibraw Malang.
- Marsudi dan Kwardiniya A. (2011) Analisis Kestabilan Model HIV/AIDS dengan Pengaruh Kelompok Umur dan Kepadatan Penduduk, *Laporan Hasil Penelitian Fundamental DP2M Dikti*, Universitas Brawijaya.
- Murray, J. D. ( 1993) *Mathematical Biology*, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, NewYork.
- Rao, A.S.R.S.. (1993) *Mathematical modeling of AIDS Epidemic in India*, *Current Science*, Vol. 84 No. 9.